

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN



**DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES DEL
GRADO 10° EN EL COLEGIO COLOMBO BRITÁNICO DE
ENVIGADO PARA EL ACERCAMIENTO A LA ACTIVIDAD
DEMOSTRATIVA EN GEOMETRÍA**

Trabajo de Grado para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Presentado por:

MARIO LEÓN SALAZAR MEJÍA

Dirigido por:

RENÉ ALEJANDRO LONDOÑO CANO

Doctor en Educación: Línea de Educación Matemática

Medellín, Enero de 2018

Nota de aceptación:

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Medellín, Enero 09 de 2018

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a todas las personas que estuvieron pendientes de mi proceso, su apoyo y palabras de aliento fueron vitales para emprender este camino y para asumirlo como un gran reto en mi vida.

A mi gran familia, por representar el pilar motivacional que me hace soñar con alcanzar grandes metas, a mi padre por quien siento gran admiración al ser el fiel ejemplo de un luchador y trabajador incansable, a mi madre por quien pudiera escribir en agradecimientos una cantidad de páginas igual o mayor a las que componen esta investigación, pero que a la misma vez se hacen indescriptibles; su entrega y amor son incomparables. A mis hermanos por la paciencia e incondicionalidad, a cada uno de mis sobrinos, en especial a Steven, quien siempre me acompaña en mis pensamientos y por quien hago muchas cosas en mi vida, de quien anhelo que igualmente ponga objetivos claros en su vida y vea en mí un ejemplo para lograr los ideales con honestidad y compromiso.

Para mi maestro de pregrado, y que por fortuna pudo acompañarme como asesor de este trabajo de grado, Profesor René Alejandro Londoño Cano, a quien admiro profundamente.

A mi novia Diana por compartir tan maravillosos momentos a mi lado y por acompañarme con su inteligencia, experiencia y sabios consejos para que hoy este trabajo sea una realidad.

Con este trabajo quiero rendir un homenaje a la memoria de Álvaro José Woff, quién me motivó para que desarrollara esta idea y a quién le debo gran parte de lo que me identifica como profesional.

Gracias a las directivas del Colegio Colombo Británico de Envigado por el apoyo y contribución en mi carrera bajo su ideal de potenciar en el cuerpo docente la investigación y de mejorar con ello las prácticas pedagógicas a nivel institucional.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

Tipo de Documento: Trabajo de grado de Maestría

Acceso al Documento: Universidad de Medellín

Título del Documento: Dificultades que presentan los estudiantes del grado 10° del colegio Colombo Británico en el acercamiento a La Actividad Demostrativa en geometría.

Autor: Mario León Salazar Mejía

Publicación: Medellín, 2017, 99 páginas

Unidad Patrocinante: Universidad de Medellín

Palabras Clave

Geometría, Actividad Demostrativa, Dificultades, Proceso, Producto, Visualización, Exploración, Conjeturación, Verificación, Argumentación, Prueba, Demostración Formal.

Descripción

Trabajo de grado presentado para optar al título de Magíster en Educación Matemática en el que se pretenden identificar las dificultades que los estudiantes del grado décimo del Colegio Colombo Británico de Envigado presentan en el acercamiento a La Actividad Demostrativa.

Para el presente estudio, se diseñó un instrumento con base en los elementos que propone el referente teórico de La Actividad Demostrativa, de tal forma que se puedan identificar las dificultades según los niveles de desempeño que se definieron para los tres casos: Visualización-

Exploración, Conjeturación-Verificación y Producto, este último relacionado con aspectos más formales en el campo a investigar.

Fuentes

Se llevó a cabo una fase de exploración bibliográfica con base en los estudios investigativos de Itzcovich (2005), de Balacheff (2000) y de Perry et al. (2006), los cuales permitieron identificar dificultades generales que se clasificaron de acuerdo con el desempeño del docente, el papel de los estudiantes y el carácter abstracto que presentan algunos conceptos fundamentales en la geometría. De acuerdo con ello, surgieron ideas que permitieron relacionar el referente teórico de La Actividad Demostrativa con la construcción de un instrumento idóneo que permitiera alcanzar los objetivos propuestos, posteriormente se interpretaron los resultados obtenidos y se clasificaron de acuerdo con los descriptores que identificaron los tres (3) casos de estudio.

Contenidos

Este trabajo de grado se encuentra conformado por cinco capítulos. El primero se refiere al planteamiento del problema que hace alusión al marco contextual, a los antecedentes, al marco legal, a la justificación y a la formulación del problema, al diseño de la pregunta de investigación y a los objetivos.

El contenido del capítulo 2 hace referencia al referente teórico: La Actividad Demostrativa, dificultades en el acercamiento a La Actividad Demostrativa, algunas dificultades encontradas en la historia de La Actividad Demostrativa en geometría y aspectos teóricos relacionados con un ambiente de aprendizaje idóneo para la enseñanza de la geometría.

El capítulo 3 se refiere a la metodología: El enfoque cualitativo del estudio, el estudio de casos como método empleado, la selección de los participantes, la recolección de la información y el diseño del instrumento

En el capítulo 4 se procede con el análisis de la información para cada uno de los casos que se determinaron.

En el capítulo 5, se presentan las conclusiones, en las cuales se presenta la consecución de los objetivos, se realizan algunas recomendaciones sobre el diseño del instrumento y se visualiza la investigación como proyecto a futuro.

Metodología

Esta es una investigación con enfoque cualitativo; desde este punto de vista se enfatizó en la interpretación de las respuestas obtenidas por parte de los estudiantes, evitando al máximo alterar las dinámicas contextuales que hacen parte de la cotidianidad de las aulas en las cuales se intervino.

Fundamentado en las ideas de Stake (1999), se implementó el estudio de casos como método que permitiera identificar las dificultades en La Actividad Demostrativa para este contexto particular del Colegio Colombo Británico de Envigado.

Conclusiones

Las preocupaciones que emergieron en la práctica profesional, el análisis bibliográfico que se llevó a cabo y las ideas plasmadas desde el referente teórico de La Actividad Demostrativa, permitieron la construcción de un instrumento que posibilitó identificar las dificultades en cuanto a las propuestas pedagógicas relacionadas con el acto demostrativo en geometría, y con ello se determinaron tres casos de estudio teniendo en cuenta la secuencialidad que parece natural en los aspectos proceso y producto de dicho referente; como dificultades más representativas se encontraron: debilidad en la interpretación de información para seguir instrucciones en actividades experimentales, poca relación de las actividades de tipo empírico con las conjeturas que se realizan y poco énfasis en procesos de verificación que cuestionan la aplicabilidad de tales conjeturas acudiendo a la particularización de las figuras geométricas que se trabajan.

Contenido

ÍNDICE DE TABLAS	xii
ÍNDICE DE FIGURAS.....	xiv
INTRODUCCIÓN	1
Capítulo 1: Planteamiento del problema	3
1.1. Marco Contextual.....	3
1.2. Antecedentes	5
1.3. Marco legal	8
1.4. Justificación del problema	14
1.5. Formulación del problema	16
1.6. Pregunta de investigación	17
1.7. Objetivos.....	17
Capítulo 2: Referente teórico	19
2.1. La actividad demostrativa	20
2.2. Dificultades encontradas desde la revisión bibliográfica.....	24
2.3. Algunas dificultades encontradas en la historia de la Actividad Demostrativa en Geometría....	32
2.4. Aspectos teóricos relacionados con un ambiente de aprendizaje idóneo para la enseñanza de la geometría	34
Capítulo 3: Metodología	37
3.1. El enfoque cualitativo del estudio.....	37
3.1.1 El método: Estudio de casos.	38
3.1.2 La selección de los participantes.....	39
3.1.3 La recolección de la información.....	41
3.2. Diseño del instrumento	41
Capítulo 4: Análisis y resultados	48
4.1. Caso tipo 1	66
4.2. Caso tipo 2	67
4.3. Caso tipo 3	68
Capítulo 5: Conclusiones	71
5.1. Consecución de los objetivos.....	71
5.2. Sobre el diseño del instrumento.....	73
5.3. Proyección hacia el futuro.....	74
Referencias bibliográficas.....	76
ANEXO 1: INSTRUMENTO APLICADO A LOS ESTUDIANTES	78
ANEXO 2: EVIDENCIAS DEL TRABAJO DE CAMPO	84

ANEXO 3: CONSENTIMIENTO INFORMADO	88
---	----

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1: SÍNTESIS DE LAS DIFICULTADES IDENTIFICADAS DESDE LA EXPLORACIÓN BIBLIOGRÁFICA.	
.....	30
TABLA 2: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 1 PARA EL ESTUDIANTE 1.....	48
TABLA 3: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 2 PARA EL ESTUDIANTE 1.....	49
TABLA 4: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 3 PARA EL ESTUDIANTE 1.....	49
TABLA 5: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 1 PARA EL ESTUDIANTE 2.....	50
TABLA 6: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 2 PARA EL ESTUDIANTE 2.....	51
TABLA 7: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 3 PARA EL ESTUDIANTE 2.....	51
TABLA 8: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 1 PARA EL ESTUDIANTE 3.....	52
TABLA 9: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 2 PARA EL ESTUDIANTE 3.....	52
TABLA 10: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 3 PARA EL ESTUDIANTE 3.....	53
TABLA 11: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 1 PARA EL ESTUDIANTE 4.....	53
TABLA 12: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 2 PARA EL ESTUDIANTE 4.....	54
TABLA 13: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 3 PARA EL ESTUDIANTE 4.....	54
TABLA 14: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 1 PARA EL ESTUDIANTE 5.....	55
TABLA 15: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 2 PARA EL ESTUDIANTE 5.....	55
TABLA 16: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 3 PARA EL ESTUDIANTE 5.....	56
TABLA 17: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 1 PARA EL ESTUDIANTE 6.....	56
TABLA 18: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 2 PARA EL ESTUDIANTE 6.....	57
TABLA 19: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 3 PARA EL ESTUDIANTE 6.....	57
TABLA 20: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 1 PARA EL ESTUDIANTE 7.....	58
TABLA 21: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 2 PARA EL ESTUDIANTE 7.....	58

TABLA 22: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 3 PARA EL ESTUDIANTE 7.....	59
TABLA 23: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 1 PARA EL ESTUDIANTE 8.....	59
TABLA 24: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 2 PARA EL ESTUDIANTE 8.....	60
TABLA 25: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 3 PARA EL ESTUDIANTE 8.....	60
TABLA 26: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 1 PARA EL ESTUDIANTE 9.....	61
TABLA 27: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 2 PARA EL ESTUDIANTE 9.....	61
TABLA 28: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 3 PARA EL ESTUDIANTE 9.....	62
TABLA 29: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 1 PARA EL ESTUDIANTE 10.....	62
TABLA 30: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 2 PARA EL ESTUDIANTE 10.....	63
TABLA 31: INTERPRETACIÓN SITUACIÓN 3 PARA EL ESTUDIANTE 10.....	63
TABLA 32: RESUMEN DE DESEMPEÑO DE LOS PARTICIPANTES.	64

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1: LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA	23
FIGURA 2: RESPUESTA DE ESTUDIANTE CASO TIPO 1, SITUACIÓN 1, PREGUNTA A.....	66
FIGURA 3: RESPUESTA DE ESTUDIANTE CASO TIPO 1, SITUACIÓN 2, PREGUNTA B.....	66
FIGURA 4: CONSTRUCCIÓN BIEN REALIZADA, SITUACIÓN 2, PREGUNTA B	67
FIGURA 5: RESPUESTA DE ESTUDIANTE CASO TIPO 2, SITUACIÓN 2, PREGUNTAS B,C Y D.....	68
FIGURA 6: RESPUESTA DE ESTUDIANTE CASO TIPO 3, SITUACIÓN 1, PREGUNTA E.	69
FIGURA 7: RESPUESTA DE ESTUDIANTE CASO TIPO 3, SITUACIÓN 1, PREGUNTAS F Y G.....	69

INTRODUCCIÓN

La preocupación por la enseñanza que aporte elementos en los estudiantes, los cuales permitan adoptar posiciones críticas, reflexivas y participativas cobra hoy vigencia dentro de la comunidad académica, y el campo de las matemáticas no es ajeno a dicha circunstancia. Para tal fin, resulta importante proponer actividades de aula que orienten los contenidos hacia niveles más formales, es decir, con carácter demostrativo, donde no se privilegie la memorización y la repetición como la manera de proceder que caracteriza las diferentes clases. En la actualidad se han hecho sus aportes al respecto, pues en este proceso surgen particularidades que corresponden a cada uno de los contextos y que han dificultado los procesos de enseñanza, así que con este propósito se quiso investigar sobre las dificultades que se hacen presentes en el contexto de La Actividad Demostrativa en la enseñanza de la Geometría para el Colegio Colombo Británico de Envigado.

Las experiencias como docente de grado décimo constituyeron el punto de partida para pensar en hacer una investigación cuyo tema central girara entorno de la geometría, y en compañía de la revisión bibliográfica que se llevó a cabo se pudo determinar el material que fuera apropiado para tal fin.

La enseñanza de la geometría demostrativa se convierte en un reto importante para docentes y estudiantes, pues no es un aspecto que se suscita frecuentemente las aulas y con el cual la mayoría de estudiantes puede sentir incomodidad, además, este aspecto corresponde al proceso de validación por excelencia en las matemáticas y por ende se supone de carácter científico, por lo tanto, una investigación como la presente cobra relevancia bajo la preocupación por cómo hacer que dichos contenidos de carácter científico sean llevados a las aulas de clase y se logre un

efectivo proceso pedagógico en el cual se pueda vislumbrar la importancia de su enseñanza y su aporte en cuanto al significado y a la comprensión de las diferentes situaciones que se analizan.

Capítulo 1: Planteamiento del problema

Capítulo 1: Planteamiento del problema

Con base en la experiencia docente que se lleva a cabo en la Institución Colegio Colombo Británico de Envigado desde hace cinco (5) años, en el interés por la enseñanza de los contenidos geométricos, y con la intención de una mejora continua en las propuestas metodológicas que apuntan hacia La Actividad Demostrativa y a la interpretación de los principales enunciados en geometría, emergen cuestionamientos que sugieren investigar sobre las razones que dificultan el manejo de las estructuras demostrativas en los estudiantes, partiendo de la solidez de los diferentes procesos argumentativos y de la necesidad de interpretar los enunciados y las propiedades de las figuras geométricas, trascendiendo en el manejo algebraico, algorítmico y memorístico ante el cual se percibe cierto dominio por parte de algunos estudiantes.

1.1. Marco Contextual

El Colegio Colombo Británico es de carácter privado, está ubicado en el municipio de Envigado y su propósito está relacionado con la formación académica de estudiantes desde el nivel de Preescolar hasta la Media Académica, con una jornada única en calendario A.

Con motivo de enriquecer las dinámicas de aula y de aportar nuevos elementos para la formación integral, entre 2014 y 2015 se dotaron las aulas con torres multimedia como recurso

Capítulo 1: Planteamiento del problema

tecnológico, las cuales se componen de un computador con conexión a internet, reproducción en video beam y tablero digital, esto, tal y como es expresado en el Proyecto Educativo Institucional-PEI¹, con el objetivo de “ofrecer herramientas diversas para la formación y alineando el desarrollo de la infraestructura con los objetivos pedagógicos y formativos institucionales” (Proyecto Educativo Institucional-PEI, Colegio Colombo Británico, 2015, p. 40).

El colegio es considerado como una buena opción para los sectores socioeconómicos medios y altos, teniendo en cuenta que se considera como una institución de alto rendimiento académico a un costo accesible, en comparación con otros colegios de su mismo nivel. Para el año 2015 en el que fue realizada la presente caracterización, la institución se ubicó en el primer puesto a nivel municipal, cuarto en el departamento y veintiséis (26) en el país, según lo indica el Índice Sintético de Calidad Educativa-ISCE² implementado por el Ministerio de Educación Nacional-MEN.

Para ese mismo año, 950 familias de un total de 1365, aportaron información valiosa que permitió identificar aspectos de trascendencia de los núcleos familiares que componen la comunidad educativa; al respecto, en el PEI (2015) se encontraron datos como los siguientes:

- Un 69.4% de las familias cuentan con una vivienda propia y moderna, planes de salud completos, con más de la canasta básica y buena educación formal hasta la universidad. A esta cifra hay que sumar 185 familias del estrato 6 o alto (un 19.4%). Lo dicho se potencia a un 88.8% de las familias del colegio.
- Las madres en un 86.4% tienen título profesional y acreditan posgrado. Los padres en un 80.3%, igualmente lo suscriben.

¹ Proyecto Educativo Institucional se abreviará en adelante como PEI.

² Índice Sintético de Calidad Educativa se abreviará en adelante ISCE.

Capítulo 1: Planteamiento del problema

Las siguientes descripciones apuntan hacia la misión y visión institucional.

Misión.

“El Colegio Colombo Británico es una casa de estudio, tal como se concibe en el PEI (2015) que, con énfasis en el idioma inglés, forma ciudadanos con los más altos estándares éticos y académicos en un ambiente sano, libre y democrático, con un talento humano motivado y competente” (Proyecto Educativo Institucional-PEI, Colegio Colombo Británico, 2015, p. 2).

Visión.

“En el año 2025 el Colombo Británico será uno de los mejores colegios del país y le aportará a la sociedad ciudadanos con calidad humana, liderazgo y competencias para enfrentar los retos socio-culturales, ambientales y educativos en el ámbito nacional y global, con una comunidad educativa sustentada en la investigación y la innovación” (Proyecto Educativo Institucional-PEI, Colegio Colombo Británico, 2015, p. 3).

1.2. Antecedentes

Es evidente la preocupación actual por el fortalecimiento de las actividades académicas relacionadas con la demostración, considerando de vital importancia los diferentes procesos que se llevan a cabo y que trascienden hacia una posición crítica, participativa y reflexiva de los estudiantes. Desde el campo de la geometría, dichos aspectos se ven relacionados con asuntos

Capítulo 1: Planteamiento del problema

esenciales de esta disciplina, y con el pensamiento de quienes la formalizaron y axiomatizaron para darle un manejo de tipo deductivo a los conocimientos empíricos de la época.

Al respecto se destacan las afirmaciones de Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006) cuando hacen referencia a la postura aristotélica respecto de la demostración como herramienta para la comprensión, afirmando: “sólo se entiende algo si se ha comprendido su respectivo por qué” (p. 54).

De otro lado, los autores ya mencionados, concuerdan con las ideas de Balacheff (2000) sobre la importancia de la enseñanza de la geometría desde un enfoque demostrativo, pero considerando factores de tipo didáctico que favorezcan la enseñanza de dichos contenidos, cuya estructura y rigurosidad son de carácter científico, ya que se considera a la demostración como el instrumento de validación en el campo de las matemáticas.

Nicolás Balacheff, se ha convertido en referente de diversas investigaciones y ha realizado grandes aportes a la temática tratada con notable profundidad y experticia; en su estudio denominado *Los Procesos de Prueba en los Alumnos de Matemáticas* analiza detalladamente los procesos de prueba como camino para la solución de un problema, del cual el estudiante se apropie y sea consciente de su validez; como él mismo lo expresa, el fin es “dilucidar la posición y el sentido de los procesos de prueba puestos en ejecución en la solución del problema, particularmente examinando de qué manera los alumnos llegan a la convicción de la validez de la solución que se proponen” (Balacheff, 2000, p.7).

Pero si bien se tiene la preocupación por trabajar la geometría desde esta perspectiva demostrativa, es importante observar la realidad de lo sucedido en dichos contextos a la luz de un par de autores; Balacheff cita a Senk en su investigación para afirmar que “en los Estados Unidos

Capítulo 1: Planteamiento del problema

de los 2699 graduandos de secundaria, el 85% no domina la formulación de una demostración” (Balacheff, 2000, p. 9). En este mismo orden de ideas, Dreyfus (citado por Perry et al., 2006) concuerda con los resultados obtenidos por Senk, (citado por Balacheff, 2000) quién mostró que “solamente un 30% de los estudiantes de un curso de geometría euclidiana, de un año de duración, alcanzó el 70% de éxito en la producción de la demostración de seis enunciados de geometría euclidiana” (Perry et al., 2006).

De acuerdo con lo mencionado, la presente investigación cobra vigencia de manera particular en el análisis de las dificultades referentes al acercamiento o aproximación a La Actividad Demostrativa, distanciándose en este sentido de la llevada a cabo por Durango (2009), quien se preocupa principalmente por las dificultades que presentan los estudiantes desde la rigurosidad y estructuración de la demostración, considerando como objetos de estudio las pruebas y las conjeturas realizadas por los mismos.

También se exploró la propuesta de Toro (2014), titulada “Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo”, en la cual se analiza la contribución que hacen los sistemas de geometría dinámica como fuente de argumentación en el campo de la geometría para estudiantes de grado octavo. Dicha investigación adoptó el modelo de Toulmin como herramienta de análisis que permite comparar la estructura de los argumentos que presentan los estudiantes cuando se enfrentan a La Actividad Demostrativa.

En la revisión bibliográfica que se realizó, se encontraron trabajos relacionados con geometría que abordan temas específicos como el estudio del perímetro y del área de figuras planas, además de textos guía para el trabajo de la asignatura a nivel universitario.

Capítulo 1: Planteamiento del problema

1.3. Marco legal

Es importante referenciar el artículo 77 (Ley General de Educación, 1994), que expresa lo relacionado con la autonomía escolar, debido a que los planes de área pertenecientes a la institución en la cual se desarrolla la investigación tienen sus particularidades, que atienden a los Derechos Básicos de Aprendizaje, Lineamientos curriculares, Estándares Básicos de Competencias, pero sobre todo, a la intencionalidad con la cual fue propuesto dicho artículo; es decir, se pretende contribuir a la formación integral de los estudiantes en relación con el contexto.

De acuerdo con lo estipulado a nivel institucional, para el grado décimo se cuenta con una disposición horaria en el área de matemáticas de ocho (8) horas, distribuidas en cuatro (4) de trigonometría y cuatro (4) de geometría, esta última, trabajada básicamente desde un enfoque argumentativo.

De acuerdo con las competencias de promoción para el grado décimo referenciadas en el plan de área de matemáticas (2014), se mencionan algunas que evidencian las destrezas de tipo argumentativo que se pretenden desarrollar:

- Aplica las características de los casos de congruencia de triángulos para efectuar demostraciones (2014, p. 186).
- Plantea diferentes opciones para demostrar un teorema o problemas propuestos de congruencia de triángulos (2014, p. 187).
- Usa las diferentes maneras para demostrar que un cuadrilátero es un paralelogramo (2014, p. 189).

Capítulo 1: Planteamiento del problema

- Propone conjeturas relacionadas con los cuadriláteros y los paralelogramos a partir de teoremas, definiciones, postulados o construcciones geométricas (2014, p. 191).
- Resuelve problemas que involucran los conceptos de área y volumen de una figura geométrica (2014, p. 195).
- Demuestra propiedades referentes a área y volumen (2014, p. 195).

La presente investigación es pertinente a la luz de los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016), entendidos como “conjunto de aprendizajes estructurantes que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, desde transición hasta once” (p. 5).

A continuación, se enuncian los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016), en correspondencia con las temáticas tratadas para el grado décimo en el Colegio Colombo Británico de Envigado. Es pertinente aclarar que los temas relacionados con Geometría expresados en los Derechos Básicos para el grado décimo son de carácter cartesiano, por lo tanto, se citarán los derechos y las evidencias de los grados octavo y noveno que corresponden a contenidos del contexto euclidiano.

Grado 8°

Derecho Básico:

Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto.

Evidencias:

- Utiliza criterios para argumentar la congruencia de dos triángulos
- Discrimina casos de semejanza de triángulos en situaciones diversas
- Resuelve problemas que implican aplicación de criterios de semejanza

Capítulo 1: Planteamiento del problema

- Compara figuras y argumenta la posibilidad de ser congruentes o semejantes entre sí (2016, p. 62).

Derecho Básico:

Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales

Evidencias:

- Describe teoremas y argumenta su validez a través de diferentes recursos (software, tangram, papel, entre otros).
- Argumenta la relación pitagórica por medio de construcción al utilizar material concreto.
- Reconoce relaciones geométricas al utilizar el teorema de Pitágoras y Thales, entre otros.
- Aplica el teorema de Pitágoras para calcular la medida de cualquier lado de un triángulo rectángulo.
- Resuelve problemas utilizando teoremas básicos (2016, p. 62).

Grado 9°

Derecho Básico:

Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Thales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.

Evidencias:

- Describe y justifica procesos de medición de longitudes.
- Explica propiedades de figuras geométricas que se involucran en los procesos de medición.
- Justifica procedimientos de medición a partir del teorema de Thales, teorema de Pitágoras y relaciones intra e interfigurales.

Capítulo 1: Planteamiento del problema

- Valida la precisión de instrumentos para medir longitudes.
- Propone alternativas para estimar y medir con precisión diferentes magnitudes (2016, p. 68).

Derecho Básico:

Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos.

Reconoce regularidades en formas bidimensionales y tridimensionales.

Evidencias:

- Explica criterios de semejanza y congruencia a partir del teorema de Thales.
- Compara figuras geométricas y conjetura sobre posibles regularidades.
- Redacta y argumenta procesos llevados a cabo para resolver situaciones de semejanza y congruencia de figuras (2016, p. 69).

Por su parte, los Lineamientos Curriculares (1998) destacan la importancia de la Geometría en la enseñanza como eje articulador de diferentes habilidades que posibilitan el desarrollo intelectual:

La Geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación.

(Lineamientos Curriculares, 1998, p.17)

Desde los procesos generales en cuanto a la estructura curricular, el razonamiento, se entiende como “la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión”

Capítulo 1: Planteamiento del problema

(Lineamientos Curriculares, 1998, p.54). Dicha acción se encuentra acorde con la forma de proceder en el campo de la Geometría, prueba de ello, lo descrito en los lineamientos curriculares (1998) respecto de los diferentes procesos que se encuentran involucrados en el acto de razonar.

Razonar en matemáticas tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar (1998, p. 54).

De acuerdo con algunas situaciones problema que los lineamientos curriculares proponen en dirección al desarrollo del razonamiento matemático para estudiantes de los grados 10° y 11°, el texto sugiere que las prácticas pedagógicas deben propiciar los siguientes aspectos, y que se encuentran relacionados con procesos característicos de La Actividad Demostrativa:

Proporcionar a los estudiantes numerosas experiencias que les hagan sentir, admirar y ejercitar el maravilloso poder lógico de su cerebro para lanzar hipótesis, formular conjeturas, confirmarlas o refutarlas, argumentar en favor o en contra de una tesis, realizar inferencias, detectar supuestos ocultos, demostrar teoremas, generar y

Capítulo 1: Planteamiento del problema

transformar información en forma rigurosa y extraer de ella otra información no percibida a primera vista, construir algunas demostraciones para enunciados matemáticos, dar contraejemplos. Deben aprender diferentes métodos de demostración. Tener experiencias en las que utilicen razonamientos inductivos y deductivos. (Lineamientos Curriculares, 1998, p. 66).

Con base en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), se concibe a la geometría como una rama de las matemáticas que de acuerdo con su naturaleza, se caracteriza por desarrollar procesos deductivos, justificativos y comprensivos de algunas demostraciones, lo cual brinda la posibilidad de llevar a la práctica las matemáticas desde una perspectiva tanto social como formal, aspecto que se corresponde con la intencionalidad de la investigación que propone el Ministerio de Educación Nacional (Estándares Básicos de Competencias, 2006).

Para los grados octavo y noveno, se proponen los siguientes estándares básicos de competencias sobre el pensamiento espacial y los sistemas geométricos:

- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostraciones de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
- Aplico y justifico criterios de congruencia y semejanza a triángulos en la resolución y formulación de problemas.
- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas (Estándares Básicos de Competencias, 1998, p. 86).

Capítulo 1: Planteamiento del problema

1.4. Justificación del problema

La geometría es un campo que se ha difundido desde las primeras civilizaciones hasta la actualidad, comenzando por las situaciones que se hicieron presentes en el estilo de vida de los egipcios y babilonios, y que se convertirían en la base de la teoría geométrica desarrollada en la antigua Grecia, la cual ha trascendido hasta la actualidad con diversos campos de aplicación que son aporte para el desarrollo y avance de las grandes disciplinas.

La Geometría ha nacido con la cotidianidad, ejemplo de ello es la consideración de que la distancia más corta de un punto a otro es la que determina la longitud de un segmento de recta, mientras que la delimitación de terrenos ha sido asociada a figuras geométricas, además de lo que se pudo observar con base en los cuestionamientos que surgieron al analizar el sistema planetario. Lo descrito se puede afirmar con las palabras de uno de los principales historiadores de la matemática griega, como lo es Proclo (410-485):

“Y por tanto, no es sorprendente que el descubrimiento de la geometría y otras ciencias tuviera su origen en las necesidades prácticas, viéndose que todas las cosas se encuentran en el camino que progresa de lo imperfecto a lo perfecto. Por tanto, la transición de la mera sensación al razonamiento y de éste al entendimiento no es más que una cosa natural.....” (Peña, 2000, p.1).

Como ha sido mencionado, la teoría geométrica emerge como producto de las necesidades humanas, lo cual denota su importancia y validez histórica. Respecto del contexto escolar, se hace pertinente un proceso exploratorio en el cual no solo se revisen sus fundamentos teóricos, sino que también se dé respuesta a interrogantes que hacen referencia a los espacios de aplicabilidad de las ciencias y a la importancia de desarrollar competencias que tengan que ver con las temáticas propuestas.

Capítulo 1: Planteamiento del problema

Por lo anteriormente descrito, es posible observar en el estudio de la Geometría la posibilidad de responder a tales interrogantes proporcionando a la vez el desarrollo de habilidades mentales que activan el raciocinio de los estudiantes, ya que dicha teoría es formulada considerando esto último como una de sus características más relevantes, aspecto propio del pensamiento griego clásico: “Los griegos la consideraban como una ciencia formativa que le ayudaba al hombre a razonar; no la estudiaban con fines prácticos, sino como desarrollo de la mente humana”. (Lastra, 2005, p.10).

Las inquietudes que manifiestan los estudiantes, sus comportamientos y el manejo que han adquirido de las matemáticas sugieren preocupaciones relacionadas con el acercamiento a la Geometría desde una perspectiva demostrativa, tanto así, que de dichos aspectos se han ocupado, y actualmente lo hacen, investigaciones de tipo académico que logran contribuir al respecto. En conversaciones informales con estudiantes, ellos manifiestan su visión de las matemáticas como un conjunto de procedimientos que siguen unas reglas establecidas, pero que siempre son guiadas por el docente, donde se indica claramente (paso a paso) la ruta que permite obtener un resultado en ausencia tanto de explicaciones que cuestionan dichos procesos, como del análisis de las respuestas obtenidas. Las concepciones que se han indagado en el Colegio Colombo Británico en estudiantes y en docentes de matemáticas sobre la importancia o la prioridad que se le brinda a las operaciones y aplicaciones de algoritmos en geometría, dejan entrever una preocupación cuando se evidencia poco énfasis en el desarrollo de habilidades de tipo argumentativo e interpretativo, lo que dificulta afrontar la justificación de argumentos geométricos de manera propositiva y creativa.

Adoptar maneras de proceder en las aulas desde un enfoque propositivo y creativo puede traer como consecuencia una aproximación a lo que Zill (2009) denomina como *Intuición*

Capítulo 1: Planteamiento del problema

Educada, término que se interpreta en este contexto como el desarrollo de destrezas relacionadas con el razonamiento lógico, el uso adecuado y racional de estrategias, y la habilidad para identificar y elegir el mejor camino para la solución de un problema, evitando divagar en la búsqueda del mismo.

De acuerdo con lo anterior, es necesario desarrollar investigaciones que indaguen por las dificultades que presentan los estudiantes en actividades de Geometría relacionadas con procesos de verificación, conjeturación y demostración, de tal forma que puedan ser identificadas para su posterior intervención didáctica. Así, la investigación que se pretende abordar cobra relevancia, por cuanto se buscan localizar situaciones que ofrecen un desequilibrio conceptual en el marco de un referente teórico pertinente que provea elementos para conseguir el objetivo trazado. Para el contexto del Colegio Colombo Británico de Envigado, el presente trabajo se realiza con la intención de aportar a las prácticas docentes y al desempeño de los estudiantes en el campo de la geometría, haciendo un mejor uso de las herramientas con las que se cuenta a nivel institucional para que, finalmente, se contribuya al desarrollo de capacidades argumentativas.

1.5. Formulación del problema

Las dificultades que presentan los estudiantes del grado décimo del Colegio Colombo Británico en el acercamiento a La Actividad Demostrativa en geometría no han sido identificadas, clasificadas y analizadas, lo que no ha posibilitado el diseño de estrategias que permitan encontrar soluciones.

Capítulo 1: Planteamiento del problema

1.6. Pregunta de investigación

¿Cuáles y de qué tipo son las dificultades que presentan los estudiantes del grado 10° del Colegio Colombo Británico en el acercamiento a La Actividad Demostrativa en geometría?

1.7. Objetivos

Objetivo general:

Identificar las dificultades que presentan los estudiantes del grado 10° del Colegio Colombo Británico para el acercamiento a La Actividad Demostrativa en geometría, mediante un proceso de categorización que permita la búsqueda de características favorables para el desarrollo de los procesos demostrativos.

Objetivos específicos:

- Rastrear elementos teóricos desde algunos referentes, que permitan identificar dificultades que se presentan usualmente en el proceso demostrativo en geometría, mediante el desempeño de los estudiantes, la labor del docente y la complejidad de los conceptos involucrados.
- Diseñar un instrumento para identificar las dificultades en el proceso demostrativo desde la perspectiva del referente teórico “La Actividad Demostrativa”.

Capítulo 1: Planteamiento del problema

Capítulo 2: Referente teórico

Capítulo 2: Referente teórico

Como punto de partida para esta investigación, se llevó a cabo una exploración bibliográfica que diera cuenta de algunas dificultades referenciadas por autores respecto del acercamiento a La Actividad Demostrativa, para que en comunión con algunas hipótesis empíricas que han surgido en la práctica docente, aportara elementos que permitieran ubicar teóricamente al investigador y le brindara la posibilidad de realizar instrumentos idóneos para el trabajo de campo.

Cabe resaltar que esas hipótesis empíricas que se mencionan, se encuentran fundamentadas por las experiencias vividas en el aula y la preocupación por llevar a cabo una práctica pedagógica de mayor calidad, cuya prioridad esté enfocada en fortalecer La Actividad Demostrativa en el área de geometría.

Es pertinente, para efectos de este trabajo investigativo, interpretar las ideas plasmadas por Itzcovich (2005), por Balacheff (2000) y por Perry et al. (2006). Dichos autores analizan las posibles dificultades a las cuales se ven enfrentados los estudiantes y maestros respecto de la enseñanza de la geometría, y coinciden en aspectos que son fundamentales como la racionalidad que exige el manejo de la geometría y el reto didáctico que implica para el maestro su enseñanza.

Capítulo 2: Referente teórico

2.1. La actividad demostrativa

Desde la perspectiva de La Actividad Demostrativa, se observan diferentes procesos que posibilitan el acercamiento a la geometría desde un enfoque argumentativo, sin que el objetivo único sea priorizar o privilegiar la estructuración y rigurosidad en la demostración, esto, considerando que ya se hizo referencia a los estudios de Dreyfus (1999) y Senk (1985) en los cuales se evidenciaron los bajos niveles de éxito cuando los estudiantes intentaron realizar una demostración en el campo de la geometría, por lo tanto, en vista de hacer más efectivo el acercamiento a dicha actividad, es pertinente involucrar los aspectos que sugiere este referente teórico, debido a que se identifican elementos propios del surgimiento de esta disciplina y a la misma vez se atiende a factores de orden didáctico que favorecen sus procesos de aprendizaje, intentando dar solución a lo que es considerado por Perry y su grupo de estudio como el conflicto que la didáctica de las matemáticas está llamada resolver, a saber: “establecer los vínculos entre la disciplina matemática, que es de carácter deductivo, y el aprendizaje de esta, que debe tener en cuenta las formas significativas (de carácter inductivo) por medio de las cuales se aprende”. (Perry et al., 2006).

Los aspectos proceso y producto de La Actividad Demostrativa, entendidos como pilares que proporcionan una estrecha relación entre la demostración y la heurística a través de los elementos que los componen, se comprenden de la forma que se expresan a continuación, sin que la secuencialidad de las acciones sea estrictamente la que se evidencia, tal y como lo expresa Perry et al. (2006): “la organización de las acciones en una lista no supone ningún orden, pero insinúa una secuencia que parece natural en La Actividad Demostrativa” (p. 59).

Capítulo 2: Referente teórico

A continuación, se abordarán algunas interpretaciones propias de los desarrollos conceptuales relacionados con los aspectos proceso y producto de La Actividad Demostrativa, de acuerdo a los planteamientos teóricos tratados por Perry et al. (2006).

El proceso:

Este aspecto se encuentra relacionado con actividades que involucran ejecuciones de tipo empírico o heurístico, entiéndase este último en palabras de Perry et al. (2006) como “la actividad mental asociada con la resolución de problemas por vías creativas en donde no hay un procedimiento definido para enfrentar la tarea, y se aprovecha la capacidad de invención” (p. 58). De manera precisa, se trata de actividades relacionadas con la visualización, exploración, verificación y conjeturación sobre situaciones geométricas en un entorno que destaca la necesidad de brindar justificaciones sobre lo que se piensa, pero ante lo cual se procede con suficientes argumentos que permiten responder asertivamente ante las perspectivas de trabajo que se plantea.

El producto:

Se encuentra relacionado con acciones de mayor complejidad, acordes al acto demostrativo, que exigen brindar explicaciones, realizar pruebas y demostraciones formales.

Elementos del aspecto proceso:

Visualización:

Comprende acciones básicas con énfasis en la observación o construcción de figuras geométricas, se identifican e intuyen posibles relaciones de dependencia, por lo tanto, es usual trabajar en esta etapa actividades de comparación de longitudes, de descripción de las figuras y

Capítulo 2: Referente teórico

de posibles preguntas que induzcan al estudiante a conclusiones preliminares basadas en sus saberes previos.

Exploración:

Fase en la que se privilegian acciones de tipo empírico tales como procesos de medición y de construcción, con el objetivo de comprender alguna situación particular y de constatar si las ideas que se han generado al respecto tienen validez en diferentes casos.

Conjeturación:

Para esta etapa, se propone la postulación de afirmaciones de tipo condicional a la luz de los análisis realizados en las dos acciones anteriores y de la convicción que ha logrado el estudiante.

Verificación:

Se identifica con actividades que son producto de cuestionamientos sobre las conjeturas que se han planteado, con el propósito de validar a través de acciones de tipo empírico.

Elementos del aspecto producto:

Explicación:

Obedece a procesos de justificación fundamentados en casos particulares de situaciones que se observan en las figuras o en los análisis que fueron realizados en las fases anteriores; dentro de las características de la explicación también se consideran las justificaciones que se realizan al acudir a expresiones de personas que tienen conocimiento de los contenidos.

Capítulo 2: Referente teórico

Prueba:

Se entiende como tal, a la argumentación de una situación con la utilización de propiedades geométricas, pero que carecen del rigor estructural de una demostración.

Demostración formal:

“Justificación de carácter deductivo que explicita y encadena en forma exhaustiva, afirmaciones y sus respectivas razones, referidas a un sistema axiomático y que lleva desde la información dada hasta aquellas que se desean mostrar” (Perry et al., 2006).

La figura 1, esboza gráficamente el referente teórico de La Actividad Demostrativa.

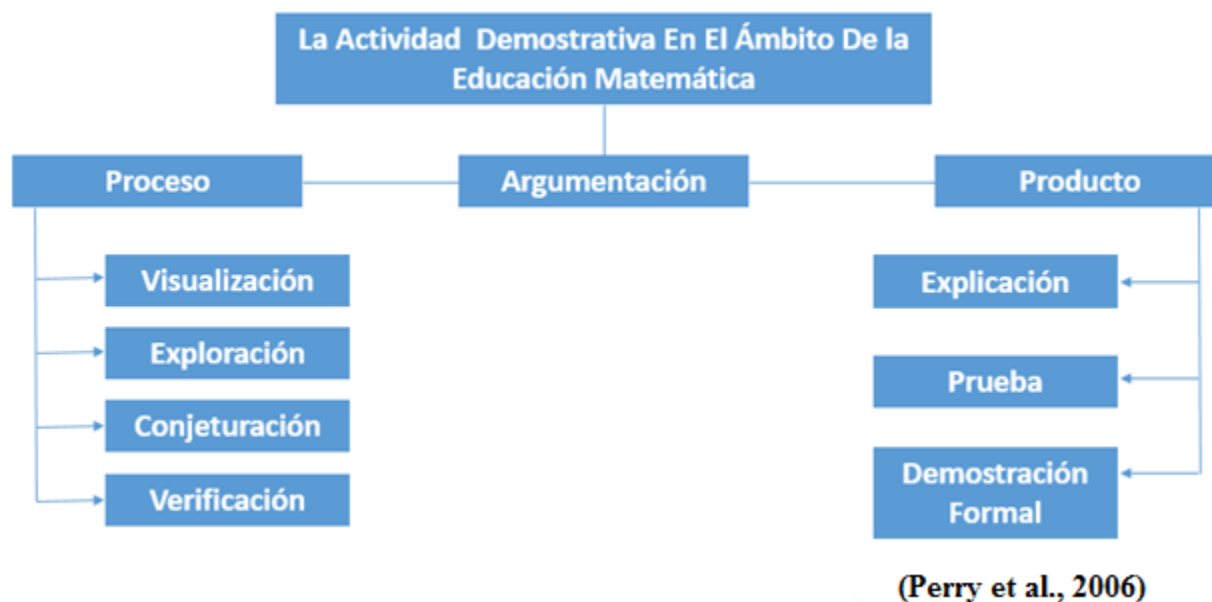


Figura 1: La Actividad Demostrativa

Capítulo 2: Referente teórico

2.2. Dificultades encontradas desde la revisión bibliográfica

En el estudio bibliográfico que se llevó a cabo, se pudieron encontrar algunas dificultades que referencian Itzcovich (2005), Balacheff (2000) y Perry et al. (2006) relacionadas con La Actividad Demostrativa, las cuales fueron divididas en tres categorías como producto del presente estudio, en correspondencia con las problemáticas generalizadas en el ámbito escolar de la geometría. Esta categorización obedece a un rastreo minucioso que condujo a la identificación de dificultades con elementos comunes, proceso que permitió la agrupación según el desempeño de los maestros, de los estudiantes y de las dificultades que emergen desde la naturaleza misma del manejo de los conceptos geométricos que son de naturaleza abstracta. Es de aclarar que ni las categorías, ni las dificultades identificadas son necesariamente excluyentes. A continuación se ilustran las principales ideas que exponen los autores ya referenciados respecto de las dificultades en La Actividad Demostrativa en la geometría.

Itzcovich (2005) en su texto *“Iniciación al estudio didáctico de la geometría”*, considera que como punto de partida para la formalización en geometría es importante proponer construcciones que generen discusiones e interrogantes en los estudiantes, y que estas ayuden a inferir propiedades de las figuras puestas en cuestión; construcciones que movilicen el pensamiento estático que por momentos se imparte, que permitan la participación activa a las dudas con el propósito de ir descubriendo las características principales de las figuras, para así en un último momento poder llevar a cabo un proceso deductivo.

Entre las posibles causas que dificultan la enseñanza y el aprendizaje de la geometría desde la perspectiva de Itzcovich (2005) se pueden encontrar que hay una tendencia a dejar de ver los contenidos de geometría por falta de tiempo, o porque las diversas dinámicas

Capítulo 2: Referente teórico

institucionales interfieren con las jornadas escolares, a tal punto que si se tiene que perder alguna clase o dejar de ver algún contenido, se sacrifica lo relacionado con la geometría, por lo tanto, se le brinda prioridad a aquellos que apunten hacia el manejo algebraico o aritmético (Itzcovich, 2005).

Otro aspecto importante al que se refiere Itzcovich (2005) y que “categorizaremos” más adelante desde la perspectiva de las dificultades asociadas a la complejidad conceptual, hace referencia al dominio de conceptos fundamentales en la geometría, sobre los cuales se estructura toda una teoría en dicho campo, pero que no son para nada fáciles de asimilar, estos son los conceptos de punto, recta, plano, en los que según coinciden diversos autores, son conceptos que se describen más no se definen; se entiende entonces que el manejar un espacio de conceptualización no real puede ser un factor determinante en el acercamiento de los estudiantes hacia la geometría.

También, desde Itzcovich, se trae a colación un aspecto que apunta a las propuestas metodológicas y didácticas por parte de los maestros, en esta oportunidad, a las constantes situaciones que se proponen para garantizar la veracidad de algún enunciado con base en argumentos que surgen netamente desde nuestra percepción o desde el empirismo, sin tener en cuenta que la verdad en este campo se fundamenta en la argumentación de tipo deductivo que encadena propiedades de las figuras estudiadas. Al respecto Itzcovich propone:

“La validación de una respuesta dada al problema –es decir, la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o falsedad de su respuesta- no se establece empíricamente, sino que se apoya en las propiedades de los objetos geométricos. Las argumentaciones a

Capítulo 2: Referente teórico

partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y las figuras producen un nuevo conocimiento sobre los mismos” (Itzcovich, 2005, p.13).

Es importante considerar que en esta misma dirección, es decir, aquella que analiza las propuestas didácticas, se observa cómo por momentos se sugiere en las clases de geometría la solución a ejercicios que se caracterizan por tener un alto contenido operativo, o un manejo algebraico que predomine sobre el análisis geométrico, sin que se promueva tal vez una interacción abundante de las dos partes o sin que sea relevante desde el punto de vista geométrico y se privilegie el mecanicismo y el trabajo algorítmico por encima del razonamiento (Itzcovich, 2005).

Desde la perspectiva de lo sucedido con los estudiantes, se ha observado un aspecto que impide el avance en el análisis de situaciones geométricas, es el de mostrarse pasivo y con un papel exclusivo en la recepción de información, conservando la visión que identifica al maestro como el dueño absoluto del conocimiento y considerando de poco valor los aportes individuales, reprimiendo los pensamientos, razonamientos e ideas que podrían influir en dinámicas de clase que contengan un alto contenido creativo y que serían de gran aporte para el trabajo en geometría (Itzcovich, 2005).

Por su parte Balacheff (2000), en su texto “*Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*” aporta aspectos relevantes respecto de las principales características de una prueba, y que la hace diferente de otro tipo de procesos que comúnmente se confunden en educación. Dentro de las dificultades mencionadas por este autor, se considera que si bien a la demostración se le puede caracterizar como una herramienta representativa en el campo científico, la enseñanza de la misma debe tener en cuenta los suficientes factores pedagógicos y didácticos que

Capítulo 2: Referente teórico

conllevarán al entendimiento de los contenidos sin que ello implique pérdida de rigurosidad tal y como lo afirma Balacheff en el párrafo siguiente:

“La demostración no puede ser enseñada del mismo modo en el aula de clase que en un ambiente puramente científico. Para convertirse en contenido de enseñanza, las matemáticas deben sufrir una transformación adaptativa, una trasposición didáctica (Chevallard 1985), bajo un conjunto de límites específicos del sistema didáctico” (Balacheff, 2000, p.2).

También, la tendencia de los maestros por proponer procesos demostrativos basados en la imitación es otro de los obstáculos que se logra percibir en las ideas de Balacheff; en dicha manera de proceder se reflexiona exiguamente por lo que se va haciendo, o se deja de lado el análisis sobre la manera en la cual se va encadenando la secuencia lógica de enunciados, privilegiando de tal forma el acercamiento al campo demostrativo desde una perspectiva centrada en la preocupación por su estructura y por la memorización (Balacheff, 2000).

Otra de las dificultades planteadas por Balacheff que se considera estrechamente relacionada con las actividades propuestas en el aula, hace referencia al lenguaje utilizado por los maestros, y que parece sugerir en repetidas ocasiones un simple ejercicio de constatación, el mismo que considera que algo ya es cierto, sin que se le invite al estudiante a investigar, a probar, o a intentar explicar las razones por las cuales sucede algo y bajo qué condiciones pueden cumplirse, este hecho tiene lugar cuando frecuentemente se emplea la expresión “*mostrar que...*” (Balacheff, 2000).

Según lo propuesto Balacheff (2000), es importante considerar una notable diferencia entre lo que se concibe por explicar, por probar y por demostrar; asumir que ellos son sinónimos

Capítulo 2: Referente teórico

puede representar una dificultad de orden conceptual que se traduciría en la confusión de una misma actividad académica sin serlo de tal forma. Es importante destacar que *la base de la explicación es esencialmente la lengua natural* (Balacheff, 2000), y que se puede interpretar como un acto comunicativo que no necesariamente va ligado a una secuencia lógica de enunciados que quizá los toma para comunicarlos, allí el aspecto principal hace referencia a un sujeto locutor. Por otra parte, probar se comprende como un proceso posterior a la explicación, ya que se acepta por una comunidad, sin que ello implique en algunos casos, que se acepte a nivel global. En la prueba se da trascendencia a las ideas del locutor y se hace ver al objeto de conocimiento como algo que no se encuentra arraigado a las creencias del mismo, sino a su acervo de conocimiento; en cuanto a lo que se interpreta por demostración, es pertinente considerar que dicho concepto hace referencia a una cadena de enunciados lógicos que se caracteriza por estar diseñada bajo una estructura matemática estricta; en palabras de Balacheff *se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas* (Balacheff, 2000, p.13), que además, permitan reflejar lo esquematizado en la realidad.

También, se puede extraer desde las lecturas realizadas a Balacheff, un gran inconveniente respecto de lo concerniente a la demostración en geometría, es a lo que él denomina como la *“problemática de la eficacia” versus “problemática del rigor”*, que hace referencia a la consideración de que aquello que es posible percibir se considera en el campo matemático como verdadero cuando dicha observación trasciende al razonamiento; y ello implica emprender un proceso de validación. Lo anterior sugiere una dificultad asociada con la complejidad del campo geométrico, debido en gran medida a la concepción que los estudiantes asumen acerca de lo que son las matemáticas. Desde las prácticas pedagógicas propias ha sido posible observar dicha situación, cuando al estudiante se le propone demostrar un teorema que ha

Capítulo 2: Referente teórico

usado con frecuencia en años anteriores (por ejemplo que “las medidas de los ángulos interiores de un triángulo suman 180° ”). Luego de una exploración y aplicación de conceptos, teoremas y corolarios fundamentales y necesarios para lograr el objetivo propuesto, el estudiante expresa que no lo considera necesario en este momento si ya lo ha usado de manera práctica y ha funcionado con anterioridad, este proceso se le dificulta bastante al estudiante lo que confirma que le ve poco sentido a demostrar algo trivial que le han enseñado sus antiguos profesores. Lo mencionado hasta acá de este último factor que dificulta la enseñanza de la geometría, se respalda en lo siguiente:

“El advenimiento de la demostración será obra de los filósofos, como evidencia de una fuerte ruptura con el mundo sensible, sustituyendo la observación por la razón como método en el que se fundamenta la verdad y el conocimiento. El cambio de la problemática consiste en la transición de una problemática de la eficacia a una problemática del rigor” (Balacheff, 2000, p.24).

De acuerdo con algunas destrezas en el trabajo geométrico demostrativo que surge como producto de razonamientos empíricos, Hoyles (Como se citó en Perry et al., 2006) menciona aquellas que ponen en evidencian un difícil acceso a esta disciplina, entre ellas se destacan la organización de argumentos lógicos y la identificación de premisas, considerándose a cada una de ellas como una serie de procedimientos de gran complejidad.

Capítulo 2: Referente teórico

Producto de lo anterior, se elabora un esquema que relaciona las dificultades referenciadas según el grupo de autores que fueron estudiados, con el desempeño de los docentes, el papel de los estudiantes y las dificultades a raíz de la complejidad misma del tema.

Tabla 1: Síntesis de las dificultades identificadas desde la exploración bibliográfica.

Docentes							
Dificultades encontradas desde autores	Un trabajo que prioriza el manejo aritmético y algebraico, de tal forma que si la continuidad en las clases se ve afectada, no se profundiza en los contenidos de tipo geométrico.	Actividades de clase que no trascienden de la observación al análisis de las propiedades de las figuras.	Propuestas académicas que no permiten observar el aporte que hace el álgebra a la geometría o viceversa, dejándolos ver como campos separados.	Se sugiere continuamente actividades de constatación, considerando que algo ya es cierto, sin que se le invite al estudiante a investigar, a probar o a intentar explicar las razones por las cuales sucede algo y bajo qué condiciones puede cumplirse.			
				La enseñanza de la geometría en un ambiente que carece de contenido pedagógico y didáctico.	La imitación como el método más difundido de enseñanza en los diferentes contenidos referentes al campo matemático.	Se asume la utilización de los verbos explicar, probar y demostrar como sinónimos en las práctica de enseñanza de las matemáticas.	
Autor	Itzcovich (2005)			Balacheff (2000)			

Capítulo 2: Referente teórico

Complejidad conceptual				Los estudiantes
Dificultades encontradas desde autores	El manejo de objetos que pertenecen a la descripción del espacio Euclidiano como puntos, rectas, planos, figuras, cuerpos, etc. no pertenecen a un espacio físico real, sino a un espacio teórico conceptualizado.	El trabajo fundamentado en la razón, característica típica del pensamiento griego que axiomatizó el conocimiento empírico de la geometría.	La coordinación de competencias tales como identificar premisas y organizar argumentos lógicos, cada una de las cuales no resulta ser simple para los estudiantes, pero es esencial para poder hacer el tránsito desde el trabajo de carácter empírico al trabajo formal en matemáticas.	Conservar la visión de que el maestro es el dueño absoluto del conocimiento y mostrarse pasivo y con un papel exclusivo en la recepción de información. El trabajo en geometría sugiere un importante contenido creativo.
Autor	Itzcovich (2005)	Balacheff (2000)	Hoyles (1997) citado por Perry et al., (2006).	Itzcovich (2005)

Capítulo 2: Referente teórico

2.3. Algunas dificultades encontradas en la historia de La Actividad Demostrativa en Geometría.

En la revisión bibliográfica anterior, se mencionan algunas dificultades relacionadas con la complejidad conceptual, lo cual se relaciona estrechamente con elementos esenciales en La Actividad Demostrativa que no son simples de asimilar, comprender o aplicar; en esta misma dirección, cabe resaltar que el trabajo que dio inicio con Thales de Mileto en la antigua Grecia no siempre estuvo caracterizado por la continua fluidez y ausencia de inconvenientes, es decir, el paso del conocimiento empírico al deductivo trajo sus limitaciones y adversidades que obligaron a reevaluar los conocimientos que se habían adquirido, ejemplo de ello, lo sucedido al interior de los pitagóricos respecto a la incomensurabilidad de los números, situación que según la historia le costó incluso la expulsión del grupo a Hipaso de Metaponto cuando este reveló que la medida de la diagonal ($\sqrt{2}$) de un cuadrado de lado 1 era un número que no se podía expresar ni como un número entero, ni como un número racional, situación que para la época era impensada.

Las construcciones con Regla y Compás³ gozaron de un lugar privilegiado en el pensamiento filosófico y racional de los griegos, las consideraban más relacionadas con el arte y con la estética, que con el desarrollo propio de las matemáticas; Ayala (2008) en su texto *Construcciones con Regla y Compás* expone la concepción de Platón al respecto como “el arte de la mente”, y deja ver lo importante que las consideraban y lo apasionados que se sentían por ellas. A continuación algunas frases extraídas del texto que se acaba de referenciar y que dan cuenta de lo descrito.

³ La regla y el compás fueron considerados en la época como instrumentos divinos.

Capítulo 2: Referente teórico

“... en el mundo ideal, el que se manifiesta en nuestras mentes, las construcciones son perfectas y manifiestan de manera pura a la belleza” (p. 15).

“Con ellos se aseguraba una geometría simple, ordenada, armónica y estéticamente bella ... Además, Platón consideraba que cualquier otro instrumento haría intervenir y depender demasiado del mundo físico, dejando relegado al mundo de lo ideal y lo perfecto” (p. 15).

“Pappus (Grecia, siglo V) indicaba que si una construcción puede realizarse con regla y compás, cualquier otra solución utilizando medios distintos no era satisfactoria. (p. 15).

Como lo mencionamos anteriormente, no todo en el surgimiento de la geometría fue sencillo, pues estas construcciones que tenían un importante significado para la geometría de la época, presentaron algunas limitaciones que acompañaron al desarrollo de esta disciplina por algunos siglos, más de quince (15), e incluso, evolucionaron solo para demostrar que no todo era posible construirlo con tales herramientas o que se requería hacer uso de otras para satisfacer los problemas iniciales, aspecto este último que se opone a las ideas plasmadas por Pappus y a la esencia de lo que son las construcciones con Regla y Compás. Los problemas conocidos como irresolubles en la geometría se caracterizan por tener un enunciado aparentemente simple, pero ante la ejecución de una posible solución no fue posible determinar el camino que conllevara al objetivo. A continuación se enunciarán brevemente:

La Cuadratura del Círculo consistía en construir un cuadrado cuya área fuera la misma de un círculo ya conocido (ya dado, ya construido); de acuerdo con la historia, es el problema con mayor antigüedad y data del siglo IV a.C., Anaxágoras trabajó en su solución mientras se encontraba preso por no reconocer la omnipotencia de sol y la luna.

Capítulo 2: Referente teórico

Con **La Duplicación del Cubo** se pretendió construir un cubo cuyo volumen representara el doble de un cubo dado. El surgimiento de tal problema se le adjudica a un hecho curioso, ocurrido en el año 429 a.C.: los atenienses abrumados de desconcierto tras la muerte de Pericles y la crisis que vivía el pueblo griego acudieron al Oráculo de Delos para pedir ayuda; como solución, el Oráculo sugirió la construcción de un altar con volumen que duplicara el del cubo existente, pero los atenienses duplicaron la arista del cubo sin percatarse de que ello lo aumentaba ocho veces más, lo sucedido agravó la situación.

De otro lado, debido a lo accesible que fue para los geómetras de la época bisecar un ángulo haciendo uso de la regla y el compás, se pensó en **La Trisección de un Ángulo Arbitrario**, pudiéndolo conseguir sólo para casos particulares como por ejemplo en la trisección de un ángulo recto, mediante la construcción de un triángulo equilátero al bisecar uno de sus ángulos. En el siglo pasado Callaham intentó demostrar que dicha construcción es posible, esto, posterior a la demostración de Wantzel en 1873 sobre la imposibilidad de llevarla a cabo, sin embargo, el primero de ellos acusa a la comunidad académica de conspirar en su contra para no reconocer su trabajo.

2.4. Aspectos teóricos relacionados con un ambiente de aprendizaje idóneo para la enseñanza de la geometría

Es pertinente que se piense que ni las matemáticas, ni ninguna otra disciplina, deben dejar de lado aquellos aspectos que han provocado su origen y la manera en la cual se han desarrollado, mucho menos cuando son objeto de enseñanza. Desde este punto de vista, cabe resaltar que la geometría asumió una connotación deductiva con la influencia del pensamiento griego, pero que en siglos anteriores sus funciones prácticas y empíricas facilitaron el avance de civilizaciones

Capítulo 2: Referente teórico

como producto de las necesidades del contexto, prácticas que facilitaron el análisis y que sirvieron de punto de partida para los grandes influyentes en el campo de la geometría.

Olvidar dichos aspectos ha traído para el contexto colombiano, en décadas anteriores, el inconformismo de quienes se encuentran involucrados en el acto educativo, relegando las intenciones de construir conocimiento desde una perspectiva basada en la comprensión, tomando como base el énfasis en elementos de tipo estructural y sistemático tal y como lo expresa Perry et al., (2006) cuando hace referencia a la reforma educativa que vivió el país en la década de los sesenta:

“la poca correspondencia de las ideas de esta reforma con las condiciones reales de los estudiantes en edad escolar, junto con la exigencia de llevarlas a la práctica, hicieron de la demostración en el ámbito educativo un ritual y no una fuente para la comprensión de las matemáticas” (Perry et al., 2006).

En vista de lo anterior, es importante considerar que en los salones de clase se encuentran realidades para las cuales también resulta significativo el contacto previo con el mundo sensible para incurrir en los contenidos de tipo conceptual posteriormente, por ello, cobran relevancia las prácticas pedagógicas enfocadas en actividades de tipo experimental correctamente enfocadas, donde no se nuble el objetivo de conllevar dichas prácticas a ámbitos de socialización de ideas fundamentadas en la argumentación, en lo observable y en los conocimientos ya adquiridos de la materia. En este mismo sentido, se destacan las ideas de Eves (1969) en su texto “*Estudio de las geometrías*” cuando afirma que:

“Antes de que un principio geométrico se pueda demostrar o refutar por deducción, debe primero pensarse o conjeturarse, y una conjetura no es sino una suposición hecha más o

Capítulo 2: Referente teórico

menos plausible por intuición, observación, analogía, experimentación o alguna otra forma de procedimiento empírico” (Eves, 1969, p.55)

En este mismo sentido, se interpretan las reflexiones de Crespo (2008) en defensa de la validez de la intuición como punto de partida para llevar a cabo diferentes análisis, que posteriormente se deben relacionar con la razón y con la experiencia, advirtiéndole que esta puede llevar a conclusiones erróneas, pero que es fundamental para el aprendizaje en las matemáticas.

En la actualidad se cuenta con diversos recursos, tanto físicos como virtuales, que pueden facilitar el acercamiento de los estudiantes al conocimiento geométrico transitando por etapas de exploración que relacionan las experiencias de tipo empírico que se identifican con el surgimiento de la geometría, lo cual conlleva un reto ineludible para el conjunto de educadores: ser continuos investigadores de sus prácticas pedagógicas y promover actividades que articulen situaciones del mundo sensible con los objetivos propuestos en los diferentes planes curriculares.

Capítulo 3: Metodología

Desde lo que se propone en la presente investigación, se abordará la problemática identificada en un entorno escolar específico con estudiantes que se encuentran cursando la media vocacional en el Colegio Colombo Británico de Envigado. Se deja claro que en este capítulo, después de haber indagado por las dificultades que fueron registradas con anterioridad en los procesos de exploración bibliográfica y que representan una visión generalizada al respecto, se retoma el referente teórico “La Actividad Demostrativa” para identificar a la luz de esta propuesta las dificultades que tienen lugar en el contexto descrito, a través de un enfoque y método de investigación apropiado.

3.1. El enfoque cualitativo del estudio

Debido a que el presente estudio se encuentra enmarcado en el campo de la educación matemática, se ha elegido el enfoque cualitativo como el apropiado para la consecución del objetivo propuesto, de acuerdo con su naturaleza y con aquellos aspectos que le caracterizan; de hecho, estudiosos al respecto lo sugieren como una de las formas más efectivas para hacer investigaciones que se relacionan con contextos escolares, así lo afirma Stake (1999) en el desarrollo de su trabajo sobre *“Investigación con estudio de casos”*.

Al hablar de su naturaleza y de sus características, es importante mencionar que desde esta perspectiva la preocupación principal se centra en la interpretación y la comprensión de los

Capítulo 3: Metodología

sucesos que tienen lugar en un contexto particular, haciendo uso de observaciones que no vulneren la cotidianidad académica de quienes están siendo estudiados (lo cual se concibe en Stake (1999) como observación naturalista), realizando registros de acontecimientos y aplicando instrumentos que permitirán desentrañar la manera en la cual las personas objeto de estudio conciben el conocimiento.

En esta sección se profundiza en contenidos que atañen al método, a la selección de los participantes, a la recolección de la información y al diseño del instrumento.

3.1.1 El método: Estudio de casos.

El estudio de casos tiene como propósito estudiar la complejidad que rodea un caso puntual, con la premisa de interpretar su accionar en una circunstancia que llama la atención, considerando de vital importancia las particularidades que rodean al caso a tal punto de valorarlas como factor relevante en sus pretensiones. Al respecto, Stake (1999) afirma que: “Para los investigadores cualitativos la unicidad de los casos y de los contextos individuales son importantes para la comprensión. La particularización es un objetivo importante, llegar a entender la particularidad del caso” (p. 44).

Es así como desde esta perspectiva, se valida la presencia de un investigador que observe continuamente lo que va sucediendo con su objeto de estudio; cabe aclarar que ante dicha observación se debe proceder con total discreción para no incurrir en las dinámicas habituales de aula y evitar así que el contexto se vea perturbado por su presencia, este proceso le permitirá al investigador la reflexión permanente sobre sus objetivos y sobre los elementos de los cuales hace uso para llevar a cabo su trabajo, de tal forma que posibilita la reformulación de las preguntas que dieron inicio a la propuesta investigativa con el fin de reorientar con mayor objetividad el

Capítulo 3: Metodología

trabajo, si es necesario. Como consecuencia de lo mencionado, se enfatiza en la experiencia humana como fuente de interpretación de sucesos fundamentados en un espacio cronológico considerable para comprender la manera en la que perciben el conocimiento las personas que hacen parte de tal estudio.

3.1.2 La selección de los participantes.

Es importante aclarar que la participación de los estudiantes en las tres etapas se da de manera voluntaria, pues manifiestan gran expectativa por los contenidos de la asignatura para el siguiente año y, además, se les contextualiza previamente acerca de la intención de la actividad, que a grandes rasgos se resume como el producto de un trabajo de investigación con el cual se busca mejorar las prácticas pedagógicas de los maestros y facilitar recursos en pro de la superación de las dificultades que se evidencien. Lo anterior posibilitó la participación masiva y una buena disposición por parte de los estudiantes, hecho que se ve relacionado con lo que concibe Stake (1999) por “*Rentabilidad*”, y que en esta propuesta se interpreta como la selección de actores dispuestos a dar su opinión con facilidad y naturalidad, ya que debido a factores como el tiempo y la fácil descripción de lo que se pretende comprender, es importante “escoger casos que sean fáciles de abordar y donde nuestras indagaciones sean acogidas”. (Stake, 1999, p.17).

De acuerdo con los resultados que fueron obtenidos en las etapas de aplicación del instrumento, se pudo establecer una clasificación según sus desempeños, definiendo tres niveles que serán los casos objeto de estudio:

- Caso I: Visualización - Exploración

Se considerará como el nivel de desempeño más básico que presentan los casos. Los estudiantes que corresponden a este caso son capaces de identificar las principales

Capítulo 3: Metodología

características de alguna figura geométrica con base en procedimientos de tipo empírico, como por ejemplo, la toma de medidas y las relaciones que surgen con base en la observación. Los estudiantes que no alcancen lo descrito en este caso tendrían dificultades principalmente en la observación y una descripción errada de las figuras que se manejan, además, se les dificulta la interpretación en el seguimiento de instrucciones para llevar a cabo un proceso experimental.

- **Caso II: Conjeturación – Verificación**

Los estudiantes de este nivel intermedio consolidan el caso al mostrar un desempeño adecuado en los procesos de visualización y exploración, y con base en ellos, son capaces de formular algunas hipótesis a las cuales les atribuyen argumentos basados en la comprobación empírica. Un estudiante que realice un previo proceso de visualización y de exploración adecuado podría tener dificultades para alcanzar el nivel del caso 2 cuando sus inferencias respecto de las actividades experimentales no son correctas, aun cuando en el seguimiento de instrucciones se perciba un buen desempeño; tampoco logran establecer relaciones entre las actividades desarrolladas y entre las propiedades de las figuras.

- **CASO III: Producto**

Es estimado como el nivel de mayor complejidad en el que se pueden ubicar los estudiantes que han realizado un exitoso proceso por los dos niveles anteriores, bajo la secuencialidad natural que sugiere La Actividad Demostrativa, y que trascienden en sus conocimientos de tipo empírico para proponer argumentaciones basadas en propiedades de las figuras que se caracterizan por conservar una estructura lógica. Un estudiante no alcanzaría el nivel descrito

Capítulo 3: Metodología

para este caso cuando los argumentos de los cuales disponga solo den cuenta de lo observado en las actividades experimentales, además, cuando en la utilización de propiedades se observen falencias que no permitan establecer una secuencia sólida de enunciados.

3.1.3 La recolección de la información.

El instrumento construido fue concebido con base en tres fases que se describirán a continuación; se entregó de forma física a diez estudiantes, proporcionando el material necesario para desarrollar las actividades experimentales que allí se proponían (regla, tijeras, pegante, palillos y un triángulo de papel). Del instrumento se esperan identificar algunas dificultades que caracterizan a los casos según los niveles en los cuales se encuentre enmarcado su desempeño, que servirán como la principal herramienta en la consecución de los objetivos de la presente investigación.

3.2. Diseño del instrumento

Las experiencias vividas por el investigador en la práctica profesional permitieron algunos cuestionamientos sobre el desempeño de los estudiantes en el área de geometría y, con base en ello, surgió la idea de explorar en diferentes textos las razones que se le atribuían a tal desempeño, que acompañada de un estudio minucioso de la propuesta realizada por Perry et al (2006) en relación a La Actividad Demostrativa, conllevó al diseño de un instrumento que permitiera identificar las dificultades en este contexto. Por lo tanto, las preocupaciones que emergían en el campo de acción, el análisis bibliográfico que se llevó a cabo y las ideas plasmadas desde el referente mencionado, se consideran en esta investigación como los ejes focales que validaron la construcción del instrumento.

Capítulo 3: Metodología

Dicho instrumento fue construido considerando tres (3) situaciones de análisis que serán descritas más adelante (en un principio se propusieron cuatro situaciones para analizar), que surgen como producto de los ejes focales ya mencionados, y para su refinamiento se hizo necesario emplear tres etapas: una primera en la cual se estructura la propuesta y es aplicada a cinco estudiantes de un grupo de grado décimo; esta intervención permitió reducir el número de preguntas/actividades, pues se habían presentado dos por cada uno de los elementos de La Actividad Demostrativa; ello parecía ir en detrimento de la fluidez de las respuestas obtenidas ya que algunos estudiantes no alcanzaban a comprender la diferencia sustancial entre algunas de ellas y para su desarrollo se requería de una inversión importante de tiempo, lo cual no era de agrado para los estudiantes. En la segunda etapa se les aplica el instrumento nuevamente a otros cinco estudiantes del mismo grado, esta experiencia permite ver que es suficiente con proponer tres situaciones de análisis, ya que de acuerdo con la generalidad observada en las tres primeras, la cuarta se hacía generalmente irrelevante, además, esto permitía una mayor optimización del tiempo, desde el punto de vista de la calidad de las respuestas que se podían obtener y desde el tiempo requerido para desarrollar la actividad. En la etapa final, luego de haber hecho las correcciones mencionadas en las dos etapas anteriores, se observa que cinco nuevos estudiantes resuelven con comodidad la prueba y que con base en los resultados obtenidos y las opiniones de quienes están participando, ya podría aplicarse al grupo de estudiantes en los cuales se espera encontrar las dificultades asociadas con La Actividad Demostrativa. Una vez transitadas estas tres etapas el instrumento es aplicado a diez estudiantes que difieren de los que habían participado en el proceso de validación del mismo, para cada etapa se consideró este aspecto fundamental, pues el proceso de socialización posterior que se dan entre los estudiantes sobre la

Capítulo 3: Metodología

realización de la actividad puede cambiar sustancialmente los resultados y no reflejar lo que verdaderamente se espera.

De acuerdo con los planes de trabajo programados en los planes de estudio del Colegio Colombo Británico de Envigado, los estudiantes del grado décimo ya han tenido en años anteriores una fundamentación básica que les permite considerar algunos aspectos de forma preliminar en el desarrollo de actividades elementales que se relacionan con la geometría; conocimientos sobre la cantidad de lados que caracterizan a los diferentes polígonos, sobre algunos conceptos no definidos como el punto y la recta, y sobre algunos postulados básicos, son ejemplos de ello. Dichos conocimientos básicos fueron tenidos en cuenta para la construcción del instrumento, lo que se corresponde con el referente teórico de La Actividad Demostrativa; además, para el comienzo del grado décimo se retoma dicha fundamentación como punto de partida en los contenidos de la asignatura. Por lo tanto, se deja claro que para el desarrollo de la actividad propuesta no se requiere contar con un amplio margen de conocimientos al respecto, ni tampoco se encuentra dirigida para estudiantes en los que se evidencia un alto nivel de razonamiento, pues la idea es encontrar las dificultades que se evidencian en el contexto y de éste hacen parte diversidad de estudiantes.

A continuación se describirá la intencionalidad de las preguntas diseñadas, según la situación propuesta.

Situación #1: “La paralela media”

Pregunta/actividad A. Se pretende indagar por los conocimientos previos del caso en la descripción de la figura que se muestra. Para futuras interpretaciones respecto de la situación que se suscita, será importante considerar lo que es el punto medio de un segmento y el cuadrilátero

Capítulo 3: Metodología

denominado paralelogramo, por lo tanto, se induce esta primera actividad con el objetivo de que los estudiantes consideren estos conceptos, así tan solo sea por simple observación, mas no por lo que sus propiedades determinen, de tal forma que se genere este primer acercamiento a la situación y se promuevan ideas que aporten a las preguntas subsiguientes.

Pregunta/actividad B. Como lo es propio del proceso de exploración en La Actividad Demostrativa, se propone una actividad experimental donde se ubican los puntos medios de dos lados de un triángulo y se toma la medida del segmento que se puede construir con dichos puntos, además, que tome la medida del tercer lado del triángulo, esto, con el propósito de que el estudiante se aproxime a la posible relación que existe entre estos dos segmentos.

Pregunta/actividad C. A través de este cuestionamiento se intenta que el estudiante infiera experimentalmente la relación que existe entre el segmento que determinan los puntos medios de dos lados de un triángulo con el tercer lado del mismo; además, se le solicita que sea explícito en la relación que fue observada en caso de haberla hallado.

Pregunta/actividad D. A través de este interrogante se le propone al estudiante un proceso de verificación respecto de lo que ha logrado conjeturar en la pregunta anterior; para ello, será de vital importancia que el estudiante realice nuevamente la actividad experimental propuesta en la pregunta número B, ante lo cual solo deberá responder si se cumple o no la misma situación en diferentes triángulos.

Pregunta/actividad E. En esta instancia, se espera que el caso se apoye en argumentos de tipo empírico que fundamenten sus explicaciones en la búsqueda de generalizaciones sobre la situación propuesta.

Capítulo 3: Metodología

Pregunta/actividad F. De acuerdo con el procedimiento realizado hasta el momento, se le propone al caso “refinar” sus conclusiones sobre la situación #1, ello con el propósito de trascender en los argumentos que provienen de la exploración y que estén relacionados con las propiedades de las figuras geométricas.

Pregunta/actividad G. Para esta última pregunta sobre la situación de “la paralela media”, el estudiante debe estructurar con mayor rigurosidad sus argumentos, lo cual permite observar una secuencia lógica de enunciados.

Situación #2: “Los ángulos de un triángulo”

Pregunta/actividad A. Con esta primera pregunta se pretende ubicar al estudiante respecto a los conceptos relacionados con esta nueva situación; mientras que en la situación #1 se abordaron análisis correspondientes a segmentos determinados por dos puntos específicos en un triángulo, en esta situación se analizarán los ángulos de la misma figura.

Pregunta/actividad B. La importancia de esta segunda pregunta radica en llevar a cabo un proceso experimental mediante el cual se pueda inducir al estudiante a verificar que con los ángulos internos de un triángulo se puede construir un ángulo llano, así se estarían empleando métodos empíricos para concluir uno de los teoremas más reconocidos y aplicados por los estudiantes.

Pregunta/actividad C. Con base en los análisis realizados, que son de tipo experimental, se le propone al estudiante realizar una conjetura sobre la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo.

Pregunta/actividad D. En búsqueda de una generalización de carácter empírico, se le pregunta al estudiante si lo sucedido hasta el momento aplica sin importar el tipo de triángulos que sean

Capítulo 3: Metodología

usados; para ello se consideran importantes las conclusiones a las que ha podido llegar como producto de las experiencias que se han llevado a cabo hasta el momento y, si es posible, que haga uso de la construcción de otros triángulos para verificar lo que hasta el momento ha determinado.

Pregunta/actividad E. En esta quinta pregunta, se espera que el estudiante se apoye en argumentos empíricos para explicar las razones que le han permitido determinar la inferencia anterior.

Pregunta/actividad F. Las pretensiones de esta pregunta se fundamentan en la utilización de propiedades de figuras para que el estudiante intente probar lo que hasta el momento ha concluido sobre la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.

Pregunta/actividad G. De acuerdo con la intencionalidad sobre la pregunta 7, se espera que el caso aborde con mayor rigor la prueba realizada en la pregunta número F.

Situación #3: “La desigualdad triangular”

Pregunta/actividad A. Como punto de partida, se le propone al estudiante considerar un aspecto que será clave para abordar la situación planteada, la cual consiste en tener en cuenta la relación existente entre las medidas de los lados de un triángulo; para ello, es pertinente que identifique en la medida de los lados de los triángulos dados, una relación que sugiera pensar en algunos conceptos básicos como la clasificación de los segmentos según el tamaño, con el fin de identificar las condiciones necesarias para la construcción de un triángulo.

Pregunta/actividad B. Al estudiante se le proporcionan 25 palillos de diferentes tamaños, para que de allí elija 3 y con ayuda del pegante logre construir un triángulo; la idea es que no desprecie la posibilidad de considerar la no construcción del triángulo al elegir palillos de

Capítulo 3: Metodología

tamaños tan variados “que no cierren la figura” (que no cumplan la desigualdad triangular), pero que elija tres que si lo permitan y que tome las medidas de los palillos que conforman los lados del triángulo.

Pregunta/actividad C. Al estudiante se le propone analizar las condiciones bajo las cuales es posible construir un triángulo, basado en las experiencias que ha tenido sobre esta situación. Se espera que pueda abstraer las relaciones entre las medidas de los segmentos que conforman los lados de un triángulo, sin necesidad de usar los palillos.

Pregunta/actividad D. Como apoyo para llevar a cabo un proceso de verificación sobre la conjetura realizada en la pregunta anterior, se le propone al estudiante construir tres triángulos más, usando los palillos. Se espera que se encuentre con una situación ante la cual reevalúe su respuesta si esta ha sido afirmativa, o que confirme lo dicho en caso de haber sido negativa.

Pregunta/actividad E. Una vez realizada la verificación sobre su conjetura, en esta quinta pregunta se le propone al caso brindar una explicación con base en los procedimientos que ha realizado en los pasos anteriores, es decir, donde su principal herramienta de apoyo sean los procedimientos empíricos que ha logrado desarrollar.

Pregunta/actividad F. Esta pregunta tiene como fin encaminar al estudiante hacia pruebas que se fundamenten en argumentos teóricos con la convicción de lo sucedido en el campo empírico.

Pregunta/actividad G. Para este momento, se espera que el estudiante aborde una explicación mucho más rigurosa y bien estructurada en la que se justifique con base en las propiedades de las figuras, teoremas, axiomas o definiciones y se desarrolle una secuencia lógica de enunciados.

Capítulo 4: Análisis y resultados

Capítulo 4: Análisis y resultados

En el contenido de este capítulo se socializarán las dificultades que se pueden evidenciar en los estudiantes del Colegio Colombo Británico de Envigado en el acercamiento a La Actividad Demostrativa; para ello se clasificará el desempeño de los diez (10) estudiantes que hicieron parte de este estudio de acuerdo con las características que se determinaron para cada uno de los tres casos descritos en el capítulo anterior; del grupo de participantes se hará una interpretación de forma individual a las respuestas obtenidas, de tal forma que se identifiquen claramente aquellos aspectos que marcan su desempeño y las dificultades que tuvieron al desarrollar la actividad propuesta.

Estudiante 1

Tabla 2: Interpretación situación 1 para el estudiante 1.

Situación 1	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	Logra visualmente identificar la mayoría de elementos que componen a la figura que se presenta, intenta describir algunos polígonos de acuerdo con el número de lados y de vértices, sin embargo, le falta precisión conceptual.
B	No parece entender completamente la instrucción, solo se indica que tome la medida de dos segmentos específicos, pero él toma la medida de todos los segmentos que componen la figura que se propone construir.
C	No establece una relación correcta, por lo tanto no se conjetura sobre la relación que existe entre los dos segmentos que se le indicó tomar sus medidas.
D	De acuerdo con la conjetura que realizó en el proceso anterior, el estudiante responde afirmativamente a la pregunta de si lo observado sucedería en otros

Capítulo 4: Análisis y resultados

	triángulos, sin embargo, su conjetura no fue correcta, así que su respuesta poco se relaciona con el objeto de estudio, de otra parte, no se evidencia un proceso de verificación que le permita al estudiante contemplar otras posibilidades que le sirvan como argumento para su respuesta, por lo tanto, se observa una dificultad al respecto, ya que este proceso es importante bajo los aportes de este referente teórico.
E	El estudiante intenta dar explicación a lo sucedido, pero particulariza la situación con triángulos rectángulos, y su explicación poco se relaciona con las actividades que ha realizado.
F	No responde
G	No responde

Tabla 3: Interpretación situación 2 para el estudiante 1.

Situación 2	
Pregunta/actividad	Análisis
A	El estudiante determina apropiadamente la relación existente entre las figuras que se muestran, lo cual permite inferir que considera la medida de los ángulos independientemente de la medida de los segmentos que los componen.
B	La actividad experimental no se desarrolla de la manera esperada, no se interpreta bien el enunciado y la ejecución carece de sentido lógico y geométrico.
C	No responde
D	No responde
E	No responde
F	No responde
G	No responde

Tabla 4: Interpretación situación 3 para el estudiante 1.

Situación 3	
Pregunta/actividad	Análisis
A	Realiza la relación de orden indicada de manera adecuada, de acuerdo con lo que se puede visualizar o con la ayuda de instrumentos que le permiten realizar las mediciones pertinentes.
B	Si bien realiza la construcción indicada, es decir, construye el triángulo con ayuda de los palillos que se le fueron entregados, el estudiante no toma las medidas de los lados de la figura y esto fue pedido, por lo tanto, se observan dificultades en cuanto al seguimiento de instrucciones o a la lectura detenida de los enunciados.
C	El estudiante determina una conjetura acertada sobre la posibilidad de

Capítulo 4: Análisis y resultados

	construir un triángulo con tres segmentos (o palillos) cualesquiera, niega que con cualesquiera de ellos se pueda construir la figura.
D	Emplea el material del que se le ha dotado y sigue las instrucciones como se indica, cumpliendo así con lo requerido para esta pregunta: construir tres triángulos con los palillos.
E	La conclusión a la que ha llegado el estudiante le permite explicar con base en los razonamientos de tipo empírico de forma correcta las condiciones bajo las cuales se hace posible la construcción de un triángulo cualquiera.
F	No responde
G	No responde

Estudiante 2

Tabla 5: Interpretación situación 1 para el estudiante 2.

Situación 1	
Pregunta/actividad	Análisis
A	Desde procesos de visualización, identifica las principales figuras que se pueden observar y las clasifica correctamente de acuerdo con sus características elementales.
B	Lleva a cabo un proceso exploratorio apropiado, construye el triángulo con ayuda de una regla y de su lápiz, además, toma las medidas del segmento que determinan los puntos medios de dos lados de un triángulo y la medida del tercer lado, esto fue lo solicitado.
C	El estudiante logra conjeturar un enunciado que efectivamente se cumple sobre la relación que tiene la paralela media de un triángulo con la base que le corresponde a dicho segmento, y es afirmar el paralelismo entre estos segmentos, sin embargo, no infiere la relación más básica, que es la esperada, es decir, la relación existente entre las medidas de los segmentos mencionados; su conjetura se remite a una conclusión posterior a la del objetivo central de la pregunta.
D	El estudiante concluye lo correcto, sin embargo, no realiza ningún proceso de verificación.
E	El estudiante intenta explicar lo sucedido con base en un proceso de exploración, pero parece estar confundido sobre el concepto de perpendicularidad y paralelismo.
F	No responde.
G	No responde.

Capítulo 4: Análisis y resultados

Tabla 6: Interpretación situación 2 para el estudiante 2

Situación 2	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	La apreciación es correcta en cuanto a la medida de los ángulos dados, además, se observa en el lenguaje que la congruencia puede hacer parte de su dominio de conocimiento.
B	De acuerdo con el objetivo de la pregunta, el estudiante construye la figura esperada, por lo tanto, se nota un buen entendimiento para seguir apropiadamente instrucciones.
C	La conjetura de acuerdo con el procedimiento anterior es válida y concuerda con el objetivo de la situación, el estudiante afirma, de acuerdo con la actividad experimental que con los ángulos interiores de un triángulo se forma un ángulo llano.
D	El estudiante considera que la situación es aplicada a otro tipo de triángulos, lo cual se relaciona con el objetivo de la situación que se propone.
E	Con base en argumentos de tipo empírico, el estudiante argumenta que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es igual a 180° , característico esto de lo considerado por Perry et al. (2006) en La Actividad Demostrativa como explicación.
F	El estudiante no logra extraer afirmaciones -de tal forma que se puedan organizar mejor- y que den cuenta de una aproximación a explicaciones más formales.
G	No responde.

Tabla 7: Interpretación situación 3 para el estudiante 2.

Situación 3	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	El estudiante establece de manera correcta el orden de las medidas de los lados de los triángulos dados.
B	En el seguimiento de instrucciones básicas se observa una adecuada interpretación de los enunciados, por lo tanto, procede ante esta pregunta de manera correcta.
C	De acuerdo con el objetivo de la pregunta y de la actividad, el estudiante responde como es esperado.
D	Emplea el material que se brinda para continuar explorando sobre la

Capítulo 4: Análisis y resultados

	conjetura que hasta el momento ha determinado.
E	Establece claramente cuáles deben ser las condiciones que deben de cumplir las medidas de tres segmentos para poder construir un triángulo.
F	No responde.
G	No responde.

Estudiante 3

Tabla 8: Interpretación situación 1 para el estudiante 3.

Situación 1	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	El estudiante relaciona los elementos observados con figuras que parece conocer, pero dichos elementos los describe bajo errores conceptuales, por ejemplo, parece confundir lo que se considera como “arista” con “lado de un polígono”, sin embargo no todas sus afirmaciones son incorrectas.
B	Procede de manera correcta bajo la instrucción que se brinda y hace uso adecuado de las herramientas con las que cuenta para tomar las medidas pedidas.
C	Infiere la relación que se espera con la actividad, incluso, establece una conclusión que se fundamenta en la relación establecida previamente y que se relaciona con el paralelismo de los dos segmentos utilizados.
D	Se observa una contradicción en su respuesta teniendo en cuenta los procesos que ha realizado anteriormente, particulariza la situación para un triángulo equilátero, sin embargo, el triángulo que construyó en la pregunta B no es equilátero.
E	Como ha particularizado la situación, explica su conclusión haciendo referencia a los triángulos isósceles y escalenos, no se perciben procesos de verificación.
F	No responde.
G	No responde.

Tabla 9: Interpretación situación 2 para el estudiante 3.

Situación 2	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	El estudiante logra concluir que la medida de los ángulos dados es congruente, hecho que se ve relacionado con lo pretendido en la pregunta.
B	Procede de manera correcta ante la construcción propuesta con el material concreto.
C	La conjetura que se propone encontrar se relaciona con lo que el participante

Capítulo 4: Análisis y resultados

	expresa, sin embargo, no hay una apropiación conceptual clara que permita ver el dominio de conceptos mucho más relacionados con el objetivo de la situación; debido a la manera en la que fueron recortados los ángulo del triángulo, al estudiante se le pudo formar una especie de “semicírculo”, y a ello hace referencia, pero su conjetura se relaciona más con la forma, que con la medida de los ángulos que fueron recortados de la figura original.
D	El estudiante simplemente dice no creer que lo observado hasta el momento sea aplicado a otros tipos de triángulos, sin embargo, no emprende un proceso de verificación que contemple otras posibilidades y que le dé importancia a sus argumentos.
E	No responde.
F	No responde.
G	No responde.

Tabla 10: Interpretación situación 3 para el estudiante 3.

Situación 3	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	No presenta inconvenientes para clasificar las medidas de los lados de los triángulos dados tal y como se indica.
B	Construye el triángulo pedido y determina las medidas de los lados de dicha figura empleando el material que se ha brindado.
C	Establece una conclusión parcial que es correcta en relación al objetivo de la situación planteada.
D	Lleva a cabo correctamente su proceso de verificación, construyendo los triángulos que se piden.
E	Hace un intento por particularizar la situación refiriéndose a conceptos relacionados con los triángulos rectángulos, pero incluso para ese caso no describe correctamente la relación apropiada.
F	Hace un intento por justificar con el apoyo de una representación gráfica, ya que dibuja tres segmentos que al intentar unirlos por sus esquinas no se alcanzan a juntar. Esto tiene coherencia, pero no estaría al nivel de la actividad pedida para esta pregunta. Además, utiliza términos como catetos e hipotenusa que son propios de los triángulos rectángulos.
G	No responde.

Estudiante 4

Tabla 11: Interpretación situación 1 para el estudiante 4.

Situación 1	
Pregunta/ actividad	Análisis

Capítulo 4: Análisis y resultados

A	Parece tener confusión sobre las características propias de un cuadrado, considerando determinante para ello simplemente el número de lados del polígono que se muestra, pero dejando de lado lo sucedido con la medida de los ángulos y con el paralelismo de los pares de lados opuestos.
B	Se realiza la construcción de un triángulo, pero no se comprende la actividad que se debe desarrollar con el mismo.
C	No responde.
D	No responde.
E	No responde.
F	No responde.
G	No responde.

Tabla 12: Interpretación situación 2 para el estudiante 4.

Situación 2	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	Conceptualmente se perciben confusiones entre lo que es concebido por ángulos y triángulos, así mismo en la descripción de los elementos que los componen.
B	Se observa un buen seguimiento de las instrucciones, se logró formar la figura que experimentalmente se pretendía al unir los “pedazos” de papel que hacían parte de los ángulos del triángulo que fue entregado.
C	No se relaciona la figura construida con lo que implica el haberla realizado un triángulo de papel, se concluyen algunas cosas que carecen de coherencia y que poco tiene que ver con la relación esperada.
D	El estudiante afirma que esta situación se puede aplicar en otros casos, es decir, para otro tipo de triángulos. Sin embargo, no expresa claramente cuál es la relación que se puede determinar en esos otros casos.
E	De acuerdo con lo expresado por el estudiante, se percibe contradicción en sus ideas, ya que ante esta respuesta afirma que dependiendo del tipo de triángulo con el que se trabaje se puede obtener otra figura que no sea precisamente la de un ángulo llano.
F	El estudiante afirma que con la construcción propuesta no solo se pueden formar ángulos llanos, sino que también se pueden construir otro tipo de figuras, lo cual es incorrecto.
G	Recuerda la clasificación de los ángulos según sus medidas, pero este hecho no le permite relacionar lo conocido con la situación planteada.

Tabla 13: Interpretación situación 3 para el estudiante 4.

Situación 3	
Pregunta/ actividad	Análisis

Capítulo 4: Análisis y resultados

A	El estudiante no posee ningún inconveniente para ordenar las medidas de los lados de los triángulos dados, tal y como se indica.
B	La construcción propuesta es realizada correctamente y de igual forma se toman las medidas pedidas.
C	Hay contradicción en la respuesta del estudiante cuando afirma que la construcción de un triángulo sí se puede llevar a cabo con tres segmentos cualesquiera, pero que depende de las medidas que ellos tengan.
D	Se realiza el proceso de verificación correctamente con la construcción de tres nuevos triángulos.
E	Las condiciones que se determinan para cumplir con la construcción del triángulo no son claras en relación a las medidas de los segmentos que lo conforman y en relación a las actividades realizadas.
F	No responde.
G	No responde.

Estudiante 5

Tabla 14: Interpretación situación 1 para el estudiante 5.

Situación 1	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	Sus apreciaciones son poco objetivas, muy “abiertas” y con descripciones que no dan cuenta de si el estudiante en realidad tiene claros algunos conceptos básicos. Expresa afirmaciones sobre lo que observa como: “un punto común donde se unen 2 líneas”, allí no se sabe con certeza a qué hace referencia, ya que la figura permite ver múltiples casos en los cuales dicha situación se presenta.
B	El estudiante desarrolla la actividad siguiendo las instrucciones y hallando los valores que se esperan con ayuda de herramientas de medición. Realiza la construcción de un triángulo y toma las medidas de los segmentos que se indican.
C	No responde.
D	No responde.
E	No responde.
F	No responde.
G	No responde.

Tabla 15: Interpretación situación 2 para el estudiante 5.

Situación 2	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	Sin ser muy preciso en el lenguaje utilizado, el estudiante identifica la

Capítulo 4: Análisis y resultados

	igualdad en las medidas de los ángulos dados.
B	No se comprenden las instrucciones que se deben seguir en la actividad experimental. Por lo tanto, la construcción realizada es incorrecta, no se unen los ángulos del triángulo original en un punto común.
C	No responde.
D	No responde.
E	No responde.
F	No responde.
G	No responde.

Tabla 16: Interpretación situación 3 para el estudiante 5.

Situación 3	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	No presenta inconvenientes para clasificar la medida de los lados de los triángulos dados de acuerdo con el ejemplo y con lo requerido en la pregunta.
B	La construcción esperada es realizada correctamente y además se toman las medidas que identifican a los lados del triángulo.
C	De acuerdo con el trabajo experimental que ha desarrollado, el estudiante no concibe aún la restricción para construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera, ya que admite la construcción de este con tres segmentos cualesquiera.
D	El estudiante construye los triángulos propuestos.
E	Las condiciones pedidas no se expresan claramente y tampoco se explica lo pensado en términos de las longitudes de los lados.
F	No responde.
G	No responde.

Estudiante 6

Tabla 17: Interpretación situación 1 para el estudiante 6.

Situación 1	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	Parece relacionar el cuadrado directamente con el número de lados que esta figura posee, sin tener en cuenta otras propiedades de este cuadrilátero.
B	El estudiante sigue las instrucciones de acuerdo con los objetivos de la pregunta. Construye la figura pedida y toma las medidas que se indican.
C	Infiere correctamente sobre la relación que existe entre el segmento construido y el tercer lado del triángulo.
D	Su conclusión no es correcta, además, no se observa algún proceso de

Capítulo 4: Análisis y resultados

	verificación. El estudiante afirma que dependiendo de las medidas de los lados del triángulo se cumple o no la relación entre el segmento que determinan los puntos medios de dos lados de un triángulo y el tercer lado de este.
E	Lo inferido en este punto no es correcto, de nuevo se particulariza en las figuras utilizadas, y además, no se lleva a cabo un proceso de verificación.
F	No responde.
G	No responde.

Tabla 18: Interpretación situación 2 para el estudiante 6.

Situación 2	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	No denomina las figuras como es debido, se muestra una secuencia de ángulos, pero cada uno de ellos los nombra como triángulos. Sin embargo, percibe claramente que la medida de los ángulos dados es la misma y que dicha medida es independiente de la medida de los segmentos que los conforman.
B	No se realiza la actividad experimental de forma correcta y se perciben dificultades en la interpretación del enunciado. El estudiante recorta el triángulo de papel por las esquinas, pero no logra comprender que estos ángulos se deben pegar de tal forma que queden contiguos.
C	No responde.
D	No responde.
E	No responde.
F	No responde.
G	No responde.

Tabla 19: Interpretación situación 3 para el estudiante 6.

Situación 3	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	Se determina el orden de las medidas de los lados de los triángulos dados correctamente.
B	El estudiante hace uso del material que se brinda para construir un triángulo y tomar las medidas de sus lados.
C	La conjetura a la que ha llegado el estudiante no le permite considerar la imposibilidad de la construcción de un triángulo haciendo uso de tres segmentos cualesquiera.

Capítulo 4: Análisis y resultados

D	El estudiante logra construir los triángulos pedidos.
E	De acuerdo con la fase exploratoria, el estudiante no logra considerar la relación que existe entre los lados de un triángulo de tal forma que dicha figura exista.
F	Sus justificaciones no obedecen a afirmaciones ordenadas y correctas, tal como es el propósito de los procesos de justificación según este referente teórico, además, el estudiante en sus palabras intenta explicar la viabilidad de su conjetura que es errónea.
G	No responde.

Estudiante 7

Tabla 20: Interpretación situación 1 para el estudiante 7.

Situación 1	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	Sus descripciones con base en lo observado son poco objetivas, el estudiante referencia puntos que forman 2 triángulos, pero pueden ser más los que cumplan con dichas características, así que no se logra establecer con claridad cuáles de ellos intenta describir.
B	El proceso de exploración es llevado a cabo tal y como es esperado; construye el triángulo que se pide y toma las medidas que se indican.
C	La relación que determina el estudiante no devela un grado de importancia, y tampoco se relaciona con los objetivos de la pregunta planteada, ya que solo hace referencia a la construcción de un triángulo que se hace más pequeño al compararlo con el triángulo original, y ello es muy obvio debido a que un lado de este “nuevo triángulo” es el formado con el segmento que une los puntos medios de dos lados del triángulo.
D	Particulariza la situación para triángulos equiláteros, pero no se exploran empíricamente otras posibilidades, no se verifica.
E	En vista de que el estudiante en la pregunta anterior ha particularizado la situación para triángulos equiláteros, atribuye lo sucedido de su inferencia a este aspecto, sin embargo, es solo la confirmación de lo sucedido, mas no es una explicación que fundamente su respuesta.
F	Intenta argumentar sobre lo sucedido, se apoya en la definición de los triángulos equiláteros, pero la relación que se intenta justificar no es de importancia para el estudio.
G	No responde.

Capítulo 4: Análisis y resultados

Tabla 21: Interpretación situación 2 para el estudiante 7.

Situación 2	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	La respuesta obtenida no es de aporte para la situación y además evidencia dificultades de orden conceptual; el estudiante se refiere a la “misma forma” de triángulos, pero las figuras que se muestran son ángulos
B	La construcción realizada es incorrecta, no se interpreta lógicamente el enunciado. Con los pedazos que se recortan en las esquinas del triángulo de papel, el estudiante forma una figura que no lo conllevará a alguna conclusión correcta.
C	No responde.
D	No responde.
E	No responde.
F	No responde.
G	No responde.

Tabla 22: Interpretación situación 3 para el estudiante 7.

Situación 3	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	De forma correcta el estudiante organiza en el orden solicitado la medida de los lados de los triángulos dados.
B	El estudiante lleva a cabo normalmente su proceso de exploración, que consiste en la construcción de un triángulo con ayuda del material que se brinda para luego medir las longitudes de los lados de los mismos.
C	El estudiante afirma que es posible la construcción de un triángulo con tres segmentos cualesquiera, lo cual contradice la teoría y lo que incluso desde el campo experimental es posible determinar.
D	Se construyen los triángulos que se sugieren.
E	El estudiante, haciendo uso de sus propias palabras intenta dar justificación a una conjetura errónea, tal y como fue expresado en el literal C.
F	No responde.
G	No responde.

Estudiante 8

Tabla 23: Interpretación situación 1 para el estudiante 8.

Situación 1	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	Parece tener claro que los cuadriláteros se caracterizan de acuerdo con unas

Capítulo 4: Análisis y resultados

	condiciones específicas, por lo tanto, no se atreve a denominar la figura como alguno de ellos, es decir, no clasifica el cuadrilátero que se muestra como un cuadrado, rectángulo o paralelogramo, sino que lo expresa en forma general. Sus descripciones son apropiadas, e incluso permite ver el manejo de aspectos como la rotación de las figuras.
B	El proceso exploratorio propuesto es llevado a cabo tal y como se indica, además, en la toma de las medidas se percibe un buen manejo de las herramientas con las cuales cuenta.
C	El estudiante percibe la relación que se espera de acuerdo con los objetivos de la situación, incluso, postula una propiedad que cumplen tales segmentos, pero que se demuestra con base en esta conjetura previa.
D	Infiere lo correcto, pero aunque intenta justificar su respuesta (no pedida) lo hace bajo una afirmación poco objetiva; el estudiante afirma que la posibilidad de establecer lo que en geometría se conoce como la paralela media se da debido a que “los triángulos son formas perfectas”.
E	Sus explicaciones concuerdan con el elemento de <i>Explicación</i> en La Actividad Demostrativa, se fundamentan en hechos empíricos y además, hace uso de procesos de verificación, empleando otros triángulos en los cuales logre observar que la inferencia hecha se cumple.
F	El estudiante se atreve a justificar lo que percibe, sin embargo, no lo hace con mayor apropiación u objetividad, él hace referencia a los triángulos como “figuras geométricas perfectas” y con base en ello intenta argumentar, por lo tanto, sus afirmaciones no se encuentran bien fundamentadas.
G	El estudiante intenta justificar lo percibido con base en lo que considera como “elongación”, pero para el caso no tiene relevancia, ni se convierte en un argumento que da cuenta de la razón por la cual sucede lo propuesto en la situación.

Tabla 24: Interpretación situación 2 para el estudiante 8.

Situación 2	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	Cumple con una visión objetiva respecto de la medida de los ángulos en relación a las pretensiones de la pregunta, pero se observa confusión respecto de la congruencia y la semejanza.
B	Desarrolla la actividad siguiendo los pasos indicados y obteniendo la figura que se pretende. Construye el triángulo pedido y toma las medidas de los segmentos que se indican.
C	La conclusión a la que llega el estudiante es la esperada, relaciona adecuadamente la construcción realizada con la figura de la cual proviene.
D	El estudiante conjetura basado en el conocimiento de esta ley (sobre la medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo).
E	Nuevamente se apoya en el conocimiento de esta ley para afirmar que ello

Capítulo 4: Análisis y resultados

	hace verdadero lo que ha encontrado en el campo experimental.
F	El estudiante no justifica lo que ha concluido de forma más ordenada y coherente. Dibuja un triángulo, en el cual escribe la medida de sus ángulos en el interior, pero dichas medidas no parecen estar correctas, y ante ello dice simplemente que ese triángulo dibujado “cumple con la regla”.
G	Dice conocer la propiedad, y la utiliza como el argumento de justificación, es decir, se apoya en la misma ley para explicar el porqué de ella.

Tabla 25: Interpretación situación 3 para el estudiante 8.

Situación 3	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	Se determina el orden correcto de las longitudes de los lados de los triángulos que se muestran con base en el criterio solicitado.
B	Se siguen las instrucciones correctamente para construir un triángulo de palillos y en él determinar la medida de sus lados.
C	Con base en el proceso de exploración anterior, el estudiante realiza la conjetura correcta sobre la medida de los lados de un triángulo para que este sea construido.
D	Nuevamente, el estudiante construye los triángulos pedidos con el material que se brinda.
E	La conclusión a la que ha podido llegar la argumenta con un caso particular, atribuyéndole una medida específica a la condición que deben cumplir los triángulos respecto de la relación de sus lados... “La diferencia entre los segmentos no sea más de 2cm”, lo cual es incorrecto ya que se busca una regla general.
F	No responde.
G	No responde.

Estudiante 9

Tabla 26: Interpretación situación 1 para el estudiante 9.

Situación 1	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	Se describe la figura con base en apreciaciones conceptualmente incorrectas, sin considerar las propiedades que caracterizan al cuadrado, relacionándolo solamente con el número de lados que este posee. El estudiante no posee un dominio conceptual básico.
B	El proceso de exploración es desarrollado con éxito en la primera parte, pero no parece comprenderse el objetivo global de la pregunta, ya que respecto de las medidas esperadas no se hace una descripción correcta.

Capítulo 4: Análisis y resultados

C	La relación observada es incorrecta, pues tiene en cuenta lo realizado en las dos actividades anteriores.
D	La respuesta es acertada, pero su proceso no deja ver que tiene claro el objetivo de la situación.
E	Se valora que el estudiante parece retomar la situación y, en vista de ello, realiza un proceso de verificación con otro tipo de triángulos, pero nuevamente la segunda parte del ejercicio no se comprende, se procede bien para comenzar, pero no se sabe para qué, ni cuáles segmentos se pretenden relacionar.
F	No responde.
G	No responde.

Tabla 27: Interpretación situación 2 para el estudiante 9.

Situación 2	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	El estudiante con claridad infiere la igualdad en la medida de los ángulos dados independientemente de la longitud de los lados que los conforman, cumpliendo así con el objetivo de la pregunta.
B	No responde.
C	No responde.
D	No responde.
E	No responde.
F	No responde.
G	No responde.

Tabla 28: Interpretación situación 3 para el estudiante 9.

Situación 3	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	No logra establecer una relación adecuada para organizar de menor a mayor la medida de los lados de los triángulos dados.
B	Construye el triángulo pedido con el material que se brinda, pero no toma las medidas de los lados tal y como se indica.
C	No se expresa con claridad ante la pregunta.
D	Se construyen los tres triángulos que se piden haciendo uso del material concreto que se ha brindado.
E	No responde.
F	No responde.
G	No responde.

Capítulo 4: Análisis y resultados
Estudiante 10

Tabla 29: Interpretación situación 1 para el estudiante 10.

Situación 1	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	No solo se percibe un dominio de los conceptos básicos que componen el espacio euclidiano, sino que desde su visualización le es posible hablar con propiedad sobre la identificación de la congruencia de figuras, el paralelismo y la perpendicularidad entre rectas.
B	La actividad que se propone en este segundo momento es llevada a cabo de forma correcta, se siguen las instrucciones y se determina lo esperado.
C	La actividad experimental no le permite determinar con mayor “exactitud” las medidas pedidas en el punto anterior, sin embargo, establece una relación entre los dos segmentos que sería lo esperado de acuerdo con el objetivo de la situación. Además, considera el paralelismo entre los dos segmentos, aspecto que es totalmente cierto.
D	La apreciación es consecuente con lo realizado hasta el momento, además es correcta. El estudiante construye tres triángulos diferentes, lo cual evidencia un proceso de verificación, y con ello verifica experimentalmente que su conjetura también se aplica a otro tipo de triángulos.
E	El estudiante no realiza explicación ni análisis, simplemente, describe lo sucedido en la situación.
F	Si bien el estudiante no realiza un proceso correcto, intenta argumentar con base en lo que él cree una posible explicación a lo sucedido, intenta emplear una serie de razones que justifiquen lo sucedido en la situación.
G	No responde.

Tabla 30: Interpretación situación 2 para el estudiante 10.

Situación 2	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	Observa con claridad la independencia de la longitud de los lados que conforman los ángulos dados en relación a la medida del ángulo.
B	Se siguen las instrucciones indicadas y se realiza una construcción acertada.
C	Con base en el proceso experimental que se ha desarrollado, el estudiante logra relacionar los elementos que se esperan y concluir de ellos lo correcto, es decir, afirma que con unir las esquinas del triángulo de papel, se forma un ángulo llano.
D	El estudiante es consecuente con las actividades que ha desarrollado y con la conjetura que ha determinado, por lo tanto, responde acertadamente a esta pregunta apoyado en su proceso experimental (lo trae a colación).
E	El estudiante atiende a la pregunta que se le hace y argumenta con sus

Capítulo 4: Análisis y resultados

	palabras la razón por la cual se determina la medida de un ángulo llano para el ángulo que se forma con base en la actividad experimental.
F	El estudiante logra explicar con base en un ejercicio experimental, al cual no le atribuye explicaciones desde las propiedades de los segmentos y los cuadriláteros que darían origen a su demostración, pero piensa en argumentos de tipo experimental que igual se relacionan con elementos teóricos sobre la medida en grados del ángulo central de un semicírculo.
G	No responde.

Tabla 31: Interpretación situación 3 para el estudiante 10.

Situación 3	
Pregunta/ actividad	Análisis
A	En el estudiante se observa con claridad la buena interpretación del enunciado, por lo tanto, se observa una apropiada manera de proceder para determinar el orden en las medidas de los segmentos que conforman los triángulos dados.
B	El estudiante realiza la actividad siguiendo las instrucciones y tomando las medidas pedidas.
C	El estudiante responde acertadamente ante la restricción para la conformación de un triángulo con tres segmentos cualesquiera, dice que ello no es posible.
D	El estudiante hace buen uso del material que se ha brindado y construye los triángulos pedidos.
E	Con base en su lenguaje y en lo que le ha permitido identificar la actividad experimental, el estudiante intenta dar argumentos que validen su conjetura, argumentos no muy precisos, pero que manifiestan su tendencia argumentativa.
F	No responde.
G	No responde.

El siguiente esquema representa en resumen, los aciertos de los estudiantes que participaron en la investigación de acuerdo con las preguntas que se hicieron para cada situación.

Cuadro resumen sobre el desempeño de los estudiantes.

Tabla 32: Resumen de desempeño de los participantes.

Est.	Sit.	Preg. A	Preg. B	Preg. C	Preg. D	Preg. E	Preg. F	Preg. G
1	1	X						
	2	X						
	3	X		X	X	X		
2	1	X	X	X	X			
	2	X	X	X	X	X		

Capítulo 4: Análisis y resultados

	3	X	X	X	X	X	
	1		X	X			
3	2	X	X				
	3	X	X	X	X		
	1						
4	2		X				
	3	X	X		X		
	1		X				
5	2	X					
	3	X	X		X		
	1		X	X			
6	2	X					
	3	X	X		X		
	1		X				
7	2						
	3	X	X		X		
	1	X	X	X	X	X	
8	2	X	X	X	X	X	
	3	X	X	X	X		
	1						
9	2	X					
	3				X		
	1	X	X	X	X	X	X
10	2	X	X	X	X		X
	3	X	X	X	X	X	

Como se expresó en el capítulo anterior, los estudiantes que fueron seleccionados para participar de esta investigación no se eligieron bajo algún criterio de rendimiento académico específico, se consideró importante la motivación y el interés de parte de ellos ante los contenidos de una asignatura (geometría) que parece generar expectativa en el conjunto de estudiantes que ingresan a grado décimo en el Colegio Colombo Británico de Envigado debido a las referencias que reciben sobre una manera diferente de trabajar las matemáticas. Lo descrito permitió, con base en los conceptos que postula la investigación cualitativa, interpretar el aporte que los estudiantes tienen por hacer respecto del objetivo central de este estudio, identificar las dificultades que se hacen presentes en este contexto en relación con el referente teórico

Capítulo 4: Análisis y resultados

Acercamiento a La Actividad Demostrativa; para tal fin, se empleó un instrumento diseñado con base en el referente teórico que se menciona y de acuerdo con él se pretendió identificar las dificultades que se hacen presentes en los estudiantes dependiendo del desempeño que caracteriza a los casos que se describieron. Para efectos de una apropiada descripción se pensaba en la preocupación al encontrar rendimientos de los estudiantes que no aportaran información para los diferentes casos, sin embargo, una vez realizado el proceso de interpretación de la información, fue posible observar que el desempeño en la prueba presentó resultados muy variados permitiéndose encontrar información para cada uno de los casos que se han determinado. A continuación, se describirán los estudiantes que pertenecen a cada uno de los casos y las dificultades que les caracterizan.

4.1. Caso tipo 1

Los estudiantes que se identifican con este nivel de desempeño fueron: Estudiante #1, #4, #5 y #7.

Las principales dificultades identificadas en estos estudiantes se encuentran enmarcadas en los procesos de visualización y de exploración, conjugado con las dificultades básicas de carácter teórico que impiden describir de manera correcta algunos elementos fundamentales en el espacio euclidiano, se confunden términos y se describen polígonos en función del número de lados que estos poseen, sin tener en cuenta la relación que existe entre sus ángulos o el paralelismo de algunos pares de lados. Además, son estudiantes a los que se les dificulta comprender enunciados que sugieren el seguimiento de instrucciones.

Capítulo 4: Análisis y resultados

a. Describa algunas características o propiedades que se observan en la figura:

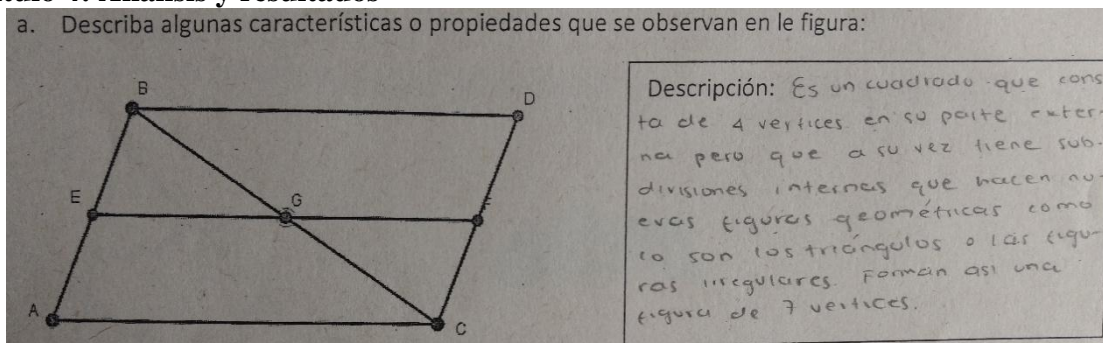


Figura 2: Respuesta de estudiante caso tipo 1, situación 1, pregunta A.

b. A partir de un triángulo de papel marque los vértices del triángulo con las letras A, B y C. Corte los ángulos por las "esquinas". Ahora pegue los pedazos de triángulo que los lados de cada ángulo queden contiguos.

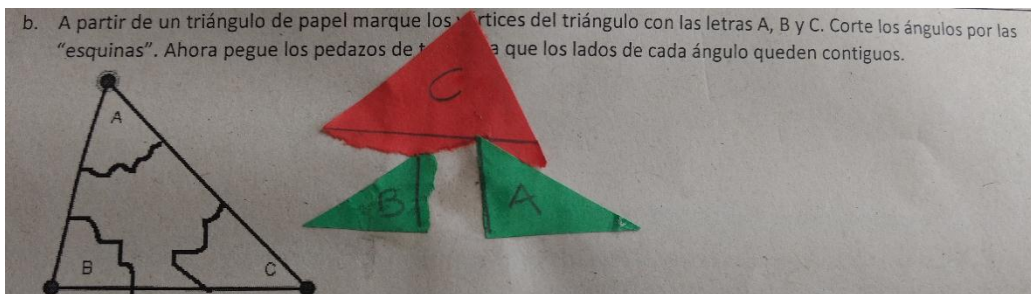


Figura 3: Respuesta de estudiante caso tipo 1, situación 2, pregunta B.

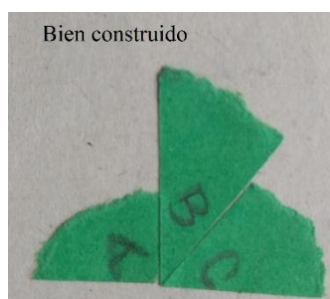


Figura 4: Construcción bien realizada, Situación 2, pregunta B

4.2. Caso tipo 2

Los estudiantes que se identifican con este nivel de desempeño fueron: Estudiante #3 y #6.

Se recuerda que en este nivel, los participantes han realizado un satisfactorio proceso de exploración y de visualización, pero que se les dificulta realizar conjeturas y ejecutar procesos de

Capítulo 4: Análisis y resultados

verificación. En el caso se evidencian dificultades para realizar inferencias que relacionen procesos de tipo empírico, para que con base en ellos logren determinar algunas hipótesis, así que el trabajo experimental no resulta consecuente con la conjetura establecida. También, se puede observar la tendencia de la gran mayoría de estudiantes a particularizar una situación, pues al no ver la experimentación como fuente esencial en la formulación de conjeturas, no se contempla la utilización de las mismas como medio que les permitan estar más seguros de lo que ha determinado, por lo tanto, no se cuestiona la aplicabilidad en diferentes situaciones.

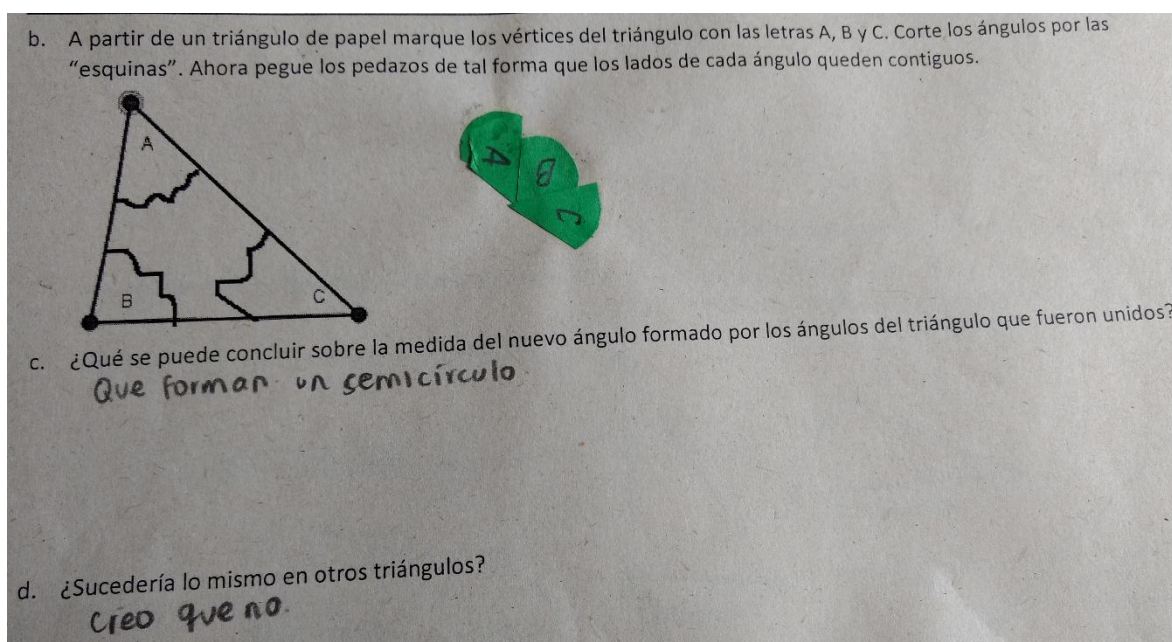


Figura 5: Respuesta de estudiante caso tipo 2, situación 2, preguntas B,C y D.

4.3. Caso tipo 3

Los estudiantes que se identifican con este nivel de desempeño fueron: Estudiante #2, #8 y #10

Este grupo de estudiantes se caracteriza por realizar de manera correcta procedimientos de tipo empírico como lo son la visualización, la experimentación y la verificación, se observó

Capítulo 4: Análisis y resultados

que intentan dar explicaciones un poco más analíticas que fundamentan las razones de sus conjeturas y acuden a argumentos experimentales como lo es propio de la explicación en el proceso *producto* de La Actividad Demostrativa, pero es evidente que carecen de un lenguaje mucho más formal y riguroso, aspecto que no preocupa considerando los datos que nos aportaron Dreyfus y Senk en el capítulo 1 y que no son ajenos a nuestra realidad contextual. En vista de ello, y con base en el producto final de esta investigación es que se buscan mejorar las prácticas pedagógicas que fortalezcan tales desempeños en cuanto al éxito en el acto demostrativo en geometría. La figura 6 da cuenta de las explicaciones a las que se hacen referencia.

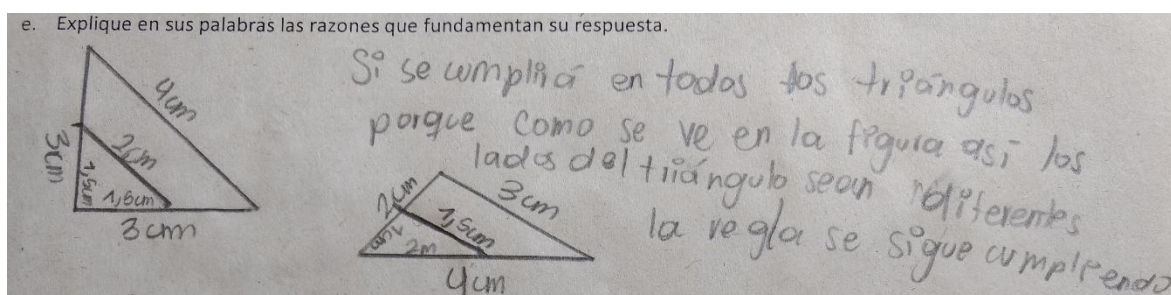


Figura 6: Respuesta de estudiante caso tipo 3, situación 1, pregunta E.

Para ser más precisos, la gran mayoría de estudiantes, y en especial aquellos que pertenecen a este caso, no fundamentaban sus argumentos en la aplicación de propiedades de las figuras, dejaban el espacio en blanco o simplemente respondían que no sabían.

Capítulo 4: Análisis y resultados

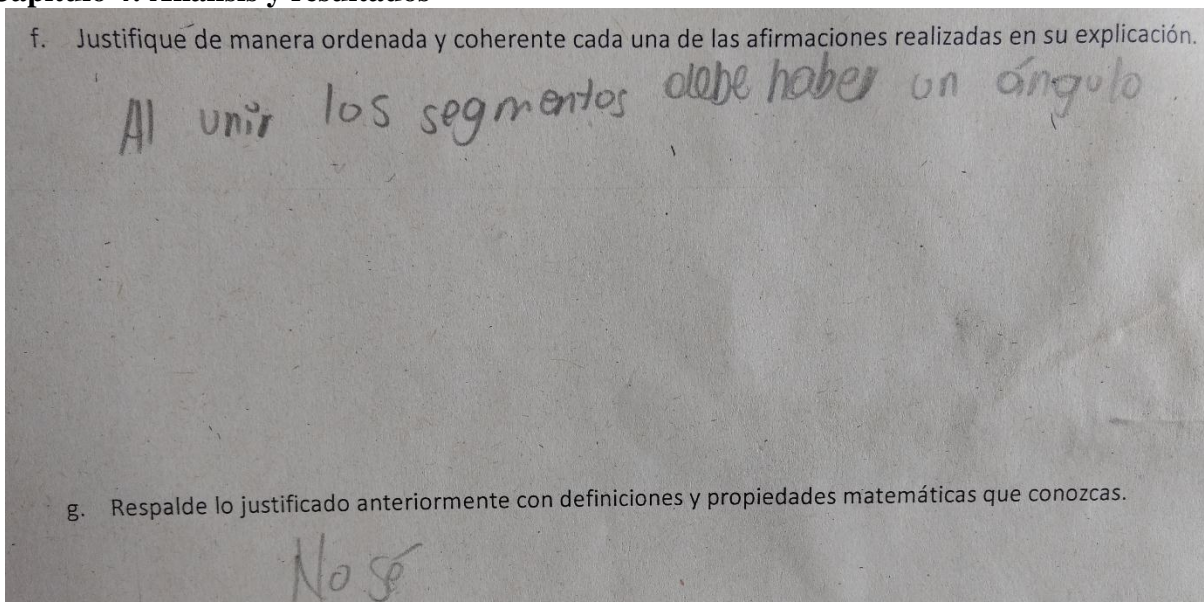


Figura 7: Respuesta de estudiante caso tipo 3, situación 1, preguntas F y G.

Nota: El estudiante #9 no fue tenido en cuenta para ser ubicado en alguno de los casos, su bajo y disperso desempeño no permite identificarlo con alguno de ellos, sus contribuciones fueron mínimas y de poco aporte. Como se evidencia en el cuadro resumen, el participante solo realiza una adecuada interpretación de las preguntas 2A y 3D; la primera de ellas referida a la descripción básica de figuras, pero sin ninguna trascendencia en el campo exploratorio, y la segunda en relación a la conjeturación de ideas pero que no es determinada mediante un proceso que permita ver la solidez de su conjetura, además, para la situación inicial no respondió de manera correcta a alguna de las preguntas que se le hicieron. De acuerdo con lo anterior, es un caso atípico en el que existe la posibilidad de que las preguntas que respondió correctamente hayan sido producto del azar y no del razonamiento en el contexto de La Actividad Demostrativa, aspecto que es objeto de estudio en esta investigación.

Capítulo 5: Conclusiones

Los trabajos investigativos a nivel educativo cobran relevancia en la medida en que estos, debido a su consistencia, coherencia y desarrollo estructurado, permitan pensar en una estrategia de aplicación para las aulas que intente superar las dificultades que se evidencian. Desde esta perspectiva, se han venido desarrollando en las últimas décadas investigaciones que aportan un significativo número de opciones, y que como en este caso, logran contribuir con aspectos específicos que suscitan determinados contextos. En este capítulo se evaluará el alcance de los objetivos que hicieron parte de este estudio, lo que intrínsecamente estaría en relación con la pertinencia y el diseño estructural que se llevó a cabo, también se comentará sobre algunos aspectos para tener en cuenta respecto del diseño del instrumento y sobre la proyección hacia el futuro de esta investigación.

5.1. Consecución de los objetivos

En el presente estudio se propuso como objetivo general, identificar las dificultades que presentan los estudiantes del grado 10° del Colegio Colombo Británico para el acercamiento a La Actividad Demostrativa en geometría, mediante un proceso de categorización que permita la búsqueda de características favorables para el desarrollo de los procesos demostrativos.

Para lograr dicho objetivo, se hizo necesario plantear la consecución de los siguientes objetivos específicos:

Capítulo 5: Conclusiones

1. Rastrear elementos teóricos desde algunos referentes, que permitan identificar dificultades que se presentan usualmente en el proceso demostrativo en geometría. Para este caso fue necesario tener en cuenta principalmente los aportes de Itzcovich (2005), Balacheff (2000) y Perry et al. (2006), los cuales representaron un gran aporte para las pretensiones de este estudio y de acuerdo con lo analizado se pudieron clasificar dichas dificultades según el desempeño de los estudiantes, la labor del docente y la complejidad de los conceptos involucrados.

En el capítulo 2 se abordaron los aportes de investigadores que han hecho reflexión sobre las dificultades que emergen en el trabajo geométrico; de acuerdo con lo que se pudo interpretar en los trabajos que en su momento fueron referenciados, surgieron ideas de posibles situaciones que se pueden adaptar a las condiciones contextuales en las cuales se realiza esta investigación y que formaron parte de la materia prima que conformaron el instrumento de aplicación. Este proceso bibliográfico permitió además, la clasificación de tales dificultades desde tres perspectivas que se consideraron como fundamentales en el proceso demostrativo en geometría: el papel del maestro, del estudiante y el acercamiento conceptual de los contenidos.

2. Diseñar un instrumento para identificar las dificultades en el proceso demostrativo desde la perspectiva del referente teórico “La Actividad Demostrativa”.

Los insumos que pudo brindar la experiencia como docente de la asignatura, aquellos que surgieron desde el rastreo bibliográfico, junto con los elementos que componen el referente teórico, se consolidaron en la elaboración de un instrumento idóneo en búsqueda de nuestras pretensiones, instrumento que fue refinado a través de unas etapas en las cuales se analizaba continuamente su aporte y que de acuerdo con las características de este referente permitió la

Capítulo 5: Conclusiones

clasificación de los participantes en tres casos de estudio que posibilitaron identificar las dificultades que se hacen presentes en el acercamiento a La Actividad Demostrativa en los estudiantes del colegio Colombo Británico de Envigado.

De acuerdo con lo anterior, fue posible verificar la contribución teórica y metodológica de estos objetivos específicos para alcanzar el objetivo general.

5.2. Sobre el diseño del instrumento

Los aportes fundamentales de la presente investigación para el diseño de un instrumento fundamentado en La Actividad Demostrativa radican en los siguientes aspectos que se deben tener en cuenta:

- No considerar despreciable la importancia de contextualizar a los estudiantes con el tipo de trabajo que se va a desarrollar, esto debido al desconocimiento que la mayoría de ellos poseen sobre los procesos utilizados y las posibles conclusiones que se pueden obtener, pero sobre todo el significado de lo que se pretende con el trabajo demostrativo en geometría.
- Es importante incentivar el trabajo geométrico con actividades en las cuales se vean implicados procesos de formalización de las matemáticas, para ello es vital la reflexión sobre cuestionamientos que relacionen actividades de tipo experimental con los conocimientos teóricos.
- Se deben estructurar preguntas con una intencionalidad clara, que permita a los estudiantes encontrar el sentido en las actividades experimentales para avanzar sobre los conocimientos de tipo empírico y reflexionar sobre diferentes procesos que estén mediados por la argumentación.

Capítulo 5: Conclusiones

- Se pudo observar ante el uso de material concreto una buena aceptación y participación de los estudiantes, por tal motivo es importante conjugar las experiencias que desde esta perspectiva empírica pueden surgir, con los objetivos globales del Acercamiento a La Actividad Demostrativa. De esta forma se da paso al fortalecimiento y desarrollo intuitivo de los estudiantes en búsqueda de orientar sus pensamientos y así, promover actividades que despierten en los estudiantes una notable motivación para que ello sirva como la puerta de entrada para un trabajo en búsqueda de la formalización.
- Con estudiantes que se encuentran en la etapa escolar es importante emplear un lenguaje apropiado que les posibilite la comprensión de las actividades y de las preguntas que se proponen, pero que en cualquiera de los casos conlleven al manejo de un lenguaje cada vez más formal.

5.3. Proyección hacia el futuro

El trabajo realizado representa en el campo académico un referente (punto de partida) para continuar en esta línea la producción teórica de La Actividad Demostrativa mediante un trabajo de investigación a nivel de Maestría o una tesis doctoral, que aborde la superación de las dificultades que fueron encontradas, o que trascienda en los conocimientos adquiridos, y que evalúe con apoyo de este referente teórico las dificultades que surgen con la implementación de software dinámicos. En la práctica profesional se ha explorado la implementación del geogebra, pero dicho aspecto no fue considerado en esta investigación debido a lo dispendioso que podría convertirse el trabajo con objetivos que apuntaran hacia dicha perspectiva, pues se teme ante ello la pérdida de objetividad por abarcar una problemática tan amplia.

Por otra parte, los resultados obtenidos en esta investigación se pretenden exponer ante el personal del Colegio Colombo Británico con motivo de socializar los hallazgos encontrados en

Capítulo 5: Conclusiones


este contexto y de tomar medidas que permitan mejorar las prácticas pedagógicas del grupo de profesores que componen el área de matemáticas en los diferentes niveles escolares.

Referencias bibliográficas

- Ayala, N. (20 de diciembre de 2008). Construcciones geométricas con regla y compás. Buenos Aires, Argentina.
- Balacheff, N. (2000). Procesos de Prueba en los Alumnos de Matemáticas. Bogotá, Colombia: Unidversidad de los Andes.
- Británico, C. C. (2014). Plan General de Area Matemáticas. Envigado, Colombia.
- Colegio Colombo Británico. (2015). Proyecto Educativo Institucional. Envigado, Colombia.
- Colombia, M. d. (1994). Ley General de Educación. Bogotá, Colombia: Congreso de la República de Colombia.
- Colombia, M. d. (7 de junio de 1998). Lineamientos Curriculares. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.
- Colombia, M. d. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- Colombia, M. d. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- Crespo, C. (2008). *Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático*. Obtenido de funes.uniandes.edu.co/5027/1/CrespoIntuiciónALME2008.pdf
- Durango, J. (2009). La Comprensión de los Razonamientos Inductivos, Deductivos y Conjeturales: “El Contexto de Justificación y Descubrimiento en la Clase de Matemática”. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

- Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrías*. Mexico, D.F.: Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.
- Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio de la geometría*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Lastra, S. (2005). Propuesta Metodológica de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, Aplicada en Escuelas Críticas. Santiago, Chile: Universidad de Chile.
- Leithold, L. (26 de Enero de 2007). Cálculo. 7. México, DF, México, México: Oveja Negra.
- Peña, M. (2000). Historia de la geometría euclidiana. *Candidus*, 4.
- Perry, P., Camargo, L., Samper, C., & Rojas, C. (2006). Actividad Demostrativa en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. Bogotá, Colombia: Nomos S.A.
- Proyecto Educativo Institucional-PEI, Colegio Colombo Británico. (2015). 40. Medellín, Colombia.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.
- Toro, J. (2014). Acercamiento a la Argumentación en un Ambiente de Geometría Dinámica: Grado Octavo. Medellín, Colombia: Universidad de Medellín.
- Zill, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Mexico, D.F.: Cengage Learning.

ANEXO 1: INSTRUMENTO APLICADO A LOS ESTUDIANTES

	COLEGIO COLOMBO BRITÁNICO		
	Dificultades encontradas en las actividades proceso y producto de la Actividad Demostrativa		
	GRADO: 10º	DOCENTE: Mario Salazar	FECHA: Octubre de 2017

Nombre: _____

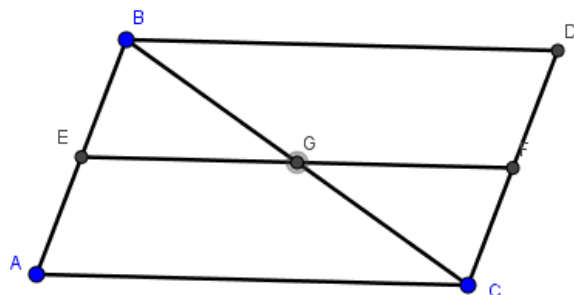
Con la actividad que se propone (Análisis de 3 situaciones) se pretende identificar algunas dificultades a las que los estudiantes se ven enfrentados en el acercamiento a La Actividad Demostrativa.

Realiza lo indicado de forma individual evitando devolverse, si no encuentra respuesta para una pregunta puede dejarla en blanco.

Situación 1:

Sigue las instrucciones que se indican y luego responde:

- a. Describa algunas características o propiedades que se observan en la figura:



Descripción:

- b. Construya un triángulo y nombre los vértices con las letras A, B y C; luego, ubique los puntos medios de dos lados y nómbralos con las letras E y D. Una estos puntos medios trazando un segmento entre ellos y tome su medida. Finalmente, tome también la medida del lado al que no le fue hallado su punto medio.

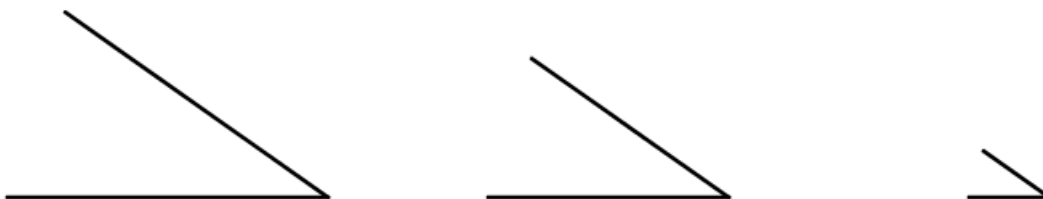
Medidas:

- c. ¿Es posible establecer una relación entre las medidas que fueron tomadas? En caso afirmativo, ¿podrías explicar qué tipo de relación existe en el triángulo construido?
- d. ¿Sucedería lo mismo en otros triángulos?
- e. Explique en sus palabras las razones que fundamentan su respuesta.
- f. Justifique de manera ordenada y coherente cada una de las afirmaciones realizadas en tu explicación.
- g. Respalda lo justificado anteriormente con definiciones y propiedades matemáticas que conozcas.

Situación 2

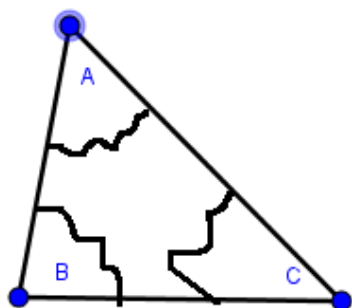
Sigue las instrucciones que se indican y luego responde:

- a. Observa los tres ángulos que se muestran en la figura. ¿podrías describir alguna relación entre ellos?



Descripción:

- b. A partir de un triángulo de papel marque los vértices del triángulo con las letras A, B y C. Corte los ángulos por las “esquinas”. Ahora pegue los pedazos de tal forma que los lados de cada ángulo queden contiguos.

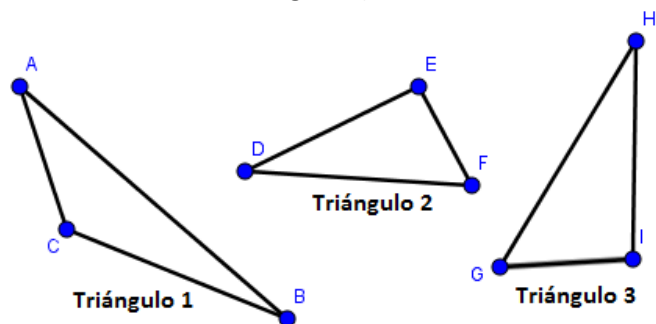


- c. ¿Qué se puede concluir sobre la medida del nuevo ángulo formado por los ángulos del triángulo que fueron unidos?
- d. ¿Sucedería lo mismo en otros triángulos?

Situación 3:

Sigue las instrucciones que se indican y luego responde:

- a. Observa los siguientes triángulos y para cada uno de ellos escribe los segmentos de menor a mayor, de acuerdo a sus medidas (observa el ejemplo que se muestra con el triángulo 1).



Triángulo 1: $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$

Triángulo 2: _____

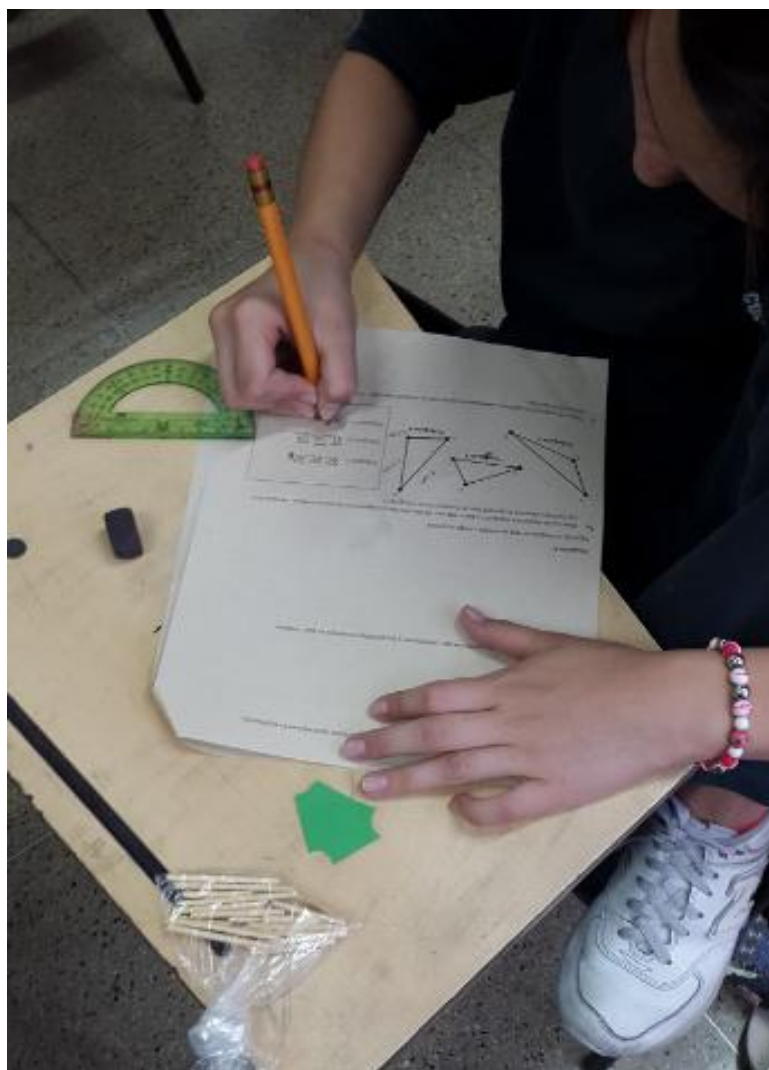
Triángulo 3: _____

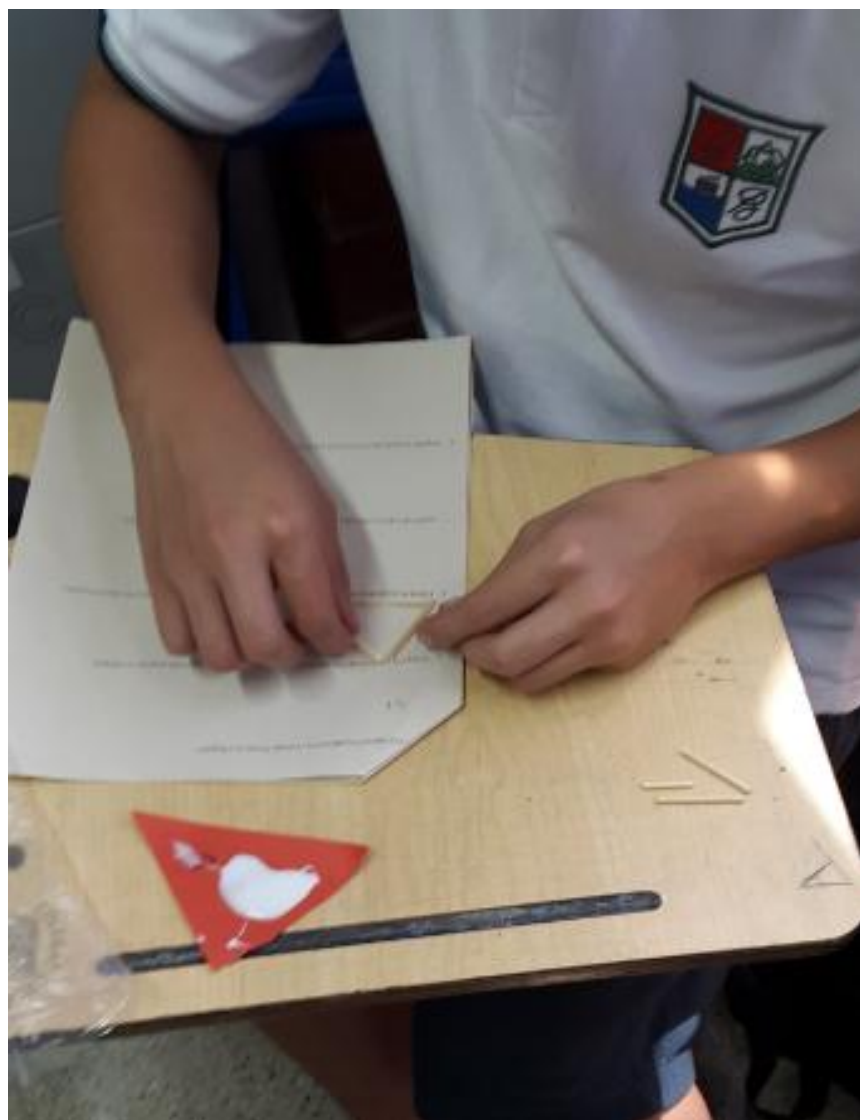
- b. Toma tres segmentos (palillos) cualesquiera y construye un triángulo con ellos. Toma las medidas de los lados del triángulo construido.

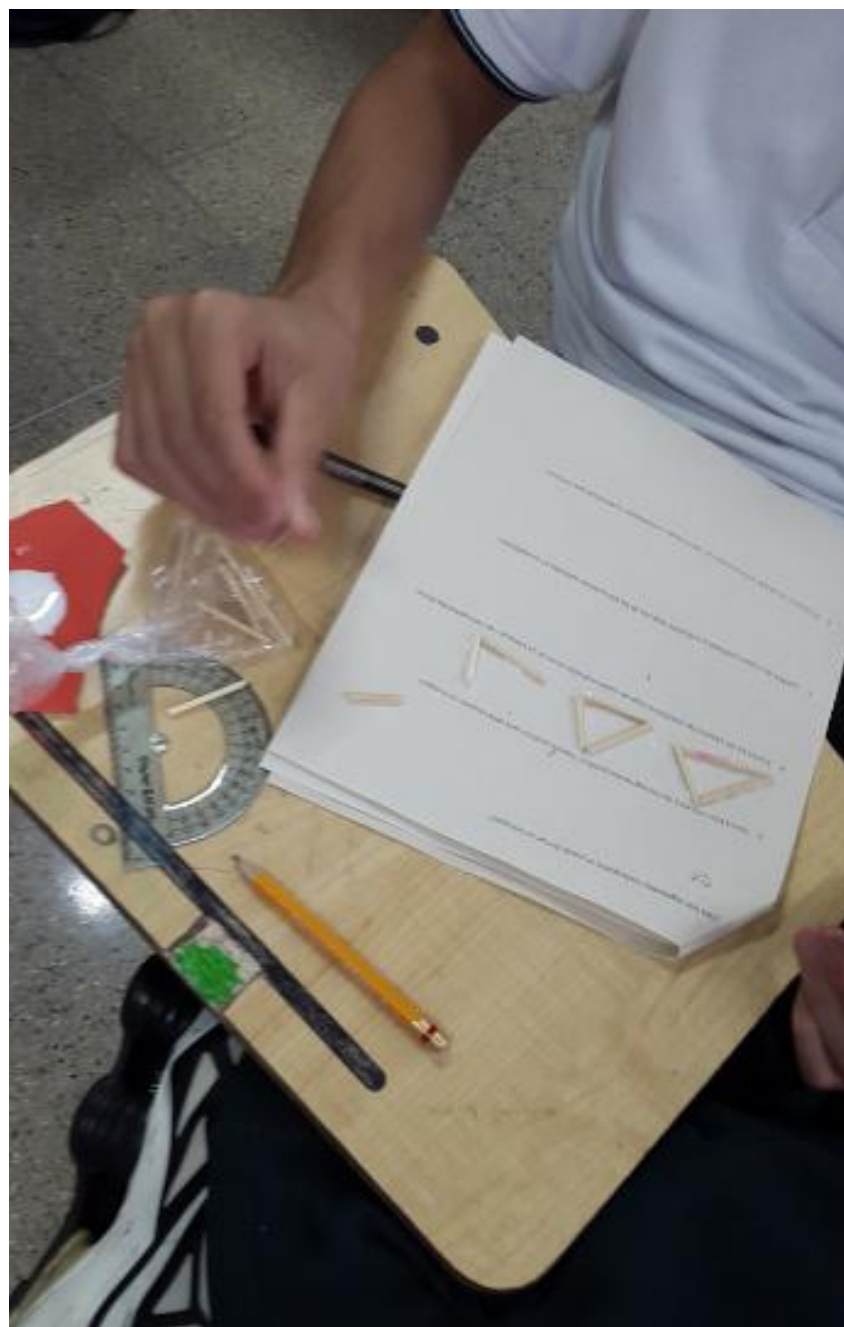
- c. ¿Con tres segmentos cualesquiera se puede formar un triángulo?

- d. Forma tres conjuntos de tres segmentos (palillos). Intenta construir para cada conjunto un triángulo

ANEXO 2: EVIDENCIAS DEL TRABAJO DE CAMPO







ANEXO 3: CONSENTIMIENTO INFORMADO

COLEGIO COLOMBO BRITÁNICO DE ENVIGADO CONSENTIMIENTO INFORMADO

Título de la Investigación: Dificultades que presentan los estudiantes del grado décimo del Colegio Colombo Británico de Envigado en el acercamiento a la actividad demostrativa en Geometría.

Investigador: Mario León Salazar Mejía.

Yo, _____, rector del Colegio Colombo Británico de Envigado, una vez informado sobre los propósitos, objetivos, procedimientos de intervención y evaluación que se llevarán a cabo en esta investigación y los posibles alcances; autorizo a _____, docente del Colegio Colombo Británico de Envigado y estudiante de la Universidad de Medellín (Maestría en Educación Matemática) para la realización de su trabajo de investigación en las instalaciones de la institución.

Adicionalmente se me informó que:

- La participación en dicho estudio no me reportará ningún beneficio de tipo material o económico. Sin embargo, se espera que los resultados obtenidos permitan mejorar las prácticas pedagógicas en la institución.
- Los resultados de la investigación serán comunicados en forma escrita y oral, y se usarán exclusivamente para fines académicos, es decir, solamente serán comunicados en publicaciones científicas o de divulgación institucional, y en eventos académicos.
- La información obtenida de las entrevistas y del estudio será confidencial, el nombre de los participantes de la investigación se mantendrá en reserva.

Hago constar que el presente documento ha sido leído y entendido por mí en su integridad de manera libre y espontánea.

En _____ constancia _____ firma:

Nombre: _____

Documento de identidad No.: _____

Ciudad y fecha: _____

Formato adaptado de:

<https://www.autonoma.edu.co/sites/default/files/attachments/article/106/05-Formatos-Recoleccion-Consentimiento-UAM-2010.pdf>

COLEGIO COLOMBO BRITÁNICO DE ENVIGADO

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Título de la Investigación: Dificultades que presentan los estudiantes del grado décimo del Colegio Colombo Británico de Envigado en el acercamiento a la actividad demostrativa en Geometría.

Investigador: Mario León Salazar Mejía.

Yo, Victor Hadimir Zapata Villegas, rector del Colegio Colombo Británico de Envigado, una vez informado sobre los propósitos, objetivos, procedimientos de intervención y evaluación que se llevarán a cabo en esta investigación y los posibles alcances, autorizo a Mario León Salazar Mejía, docente del Colegio Colombo Británico de Envigado y estudiante de la Universidad de Medellín (Maestría en Educación Matemática) para la realización de su trabajo de investigación en las instalaciones de la institución.

Adicionalmente se me informó que:

- La participación en dicho estudio no me reportará ningún beneficio de tipo material o económico. Sin embargo, se espera que los resultados obtenidos permitan mejorar las prácticas pedagógicas en la institución.
- Los resultados de la investigación serán comunicados en forma escrita y oral, y se usarán exclusivamente para fines académicos, es decir, solamente serán comunicados en publicaciones científicas o de divulgación institucional, y en eventos académicos.
- La información obtenida de las entrevistas y del estudio será confidencial, el nombre de los participantes de la investigación se mantendrá en reserva.

Hago constar que el presente documento ha sido leído y entendido por mí en su integridad de manera libre y espontánea.

En constancia firmo: Victor Hadimir Zapata Villegas

Nombre: _____

Documento de identidad No: 8302.572

Ciudad y fecha: Envigado, 12 de enero de 2018

Formato adaptado de:

<https://www.autonoma.edu.co/sites/default/files/attachments/article/106/05-Formatos-Recoleccion-Consentimiento-UAM-2010.pdf>